Стабилизация управляемой системы за конечное время

И.М. Ананьевский, А.И. Овсеевич

ВСПУ 2019

18 июня 2019

План

- Постановка задачи
- Каноническая форма управляемой системы
- Конструкция В.И. Коробова
- Существование общей функции Ляпунова
- Общая функция Ляпунова с дополнительными свойствами
- Приложения

Постановка задачи

Рассмотрим линейную автономную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x \in V = \mathbf{R}^N, \ u \in \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

для которой выполнено условие управляемости Калмана.

Задача

Построить такое ограниченное управление $u = u(x)$ что для достаточно малых $x(0)$ фазовая кривая уравнения $\dot{x} = Ax + Bu(x)$ с начальным условием $x(0)$ попадает в точку 0 за конечное время.

Задача не меняется при заменах

$$A \mapsto A + BC, \quad u \mapsto u - Cx, \quad A \mapsto D^{-1}AD, \quad B \mapsto D^{-1}B, \tag{2}$$

соответствующих добавлению линейной обратной связи и замене координат.

Каноническая форма

Определение

Система (1) имеет каноническую форму, если имеются матрицы $\delta = \delta(T)$, такие что

$$\delta A \delta^{-1} = T^{-1} A, \ \delta B = T^{-1} B \tag{3}$$

Соотношения (3) однозначно определяют матричную функцию $\delta(T)$, причем

$$\begin{aligned} &T \frac{d}{dT}\delta = M\delta, \quad MA - AM = -A, MB = -B, \\ &Mx = \lambda x \Rightarrow MAx = (\lambda - 1)Ax, \end{aligned} \tag{4}$$

так что спектр M состоит из отрицательных целых чисел. Из теоремы Бруновского [3] следует, что вполне управляемая система всегда приводится заменами (2) к канонической форме и эта форма единственна с точностью до замены координат.

Приведение к канонической форме I

Рассмотрим случай скалярного управления: $B = b$ — вектор. Векторы $e_i = A^{i-1}b,\ i = 1, \ldots, N$ образуют базис $V = \mathbf{R}^N$, и пусть $f_i \in V^*$ образуют двойственный базис: $\langle f_i, e_i \rangle = \delta_{ij}$. Положим $\phi = f_N$ и $\phi_i = \phi A^{i-1},\ i = 1, \ldots, N$. Двойственные векторы ϕ_i задают в $V = \mathbf{R}^N$ систему координат: $V \ni x \mapsto y = (y_i) \in \mathbf{R}^N$, где $y_i = \langle \phi_i, x \rangle$. В этой системе координат оператор A изображается матрицей $\widetilde{A}$, такой что $(\widetilde{A}y)_i = \langle \phi A^i, x \rangle,\ i = 1, \ldots, N$, а вектор b имеет N–ю компоненту 1, а все остальные — нули.

Поскольку $(\widetilde{A}y)_i = \langle \phi A^i, x \rangle = \langle \phi_{i+1}, x \rangle = y_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, N-1$, то

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_N \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Приведение к канонической форме II

где вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) = \phi A^N$.
Введем новое управление $u_1 = u + \langle a, y \rangle$. Тогда система (1) приобретает каноническую форму $\dot{y} = A_1 y + B_1 u_1$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

а матрица δ имеет вид $\delta(T) = \mathrm{diag}(T^N, T^{N-1}, \dots, T^1)^{-1}$.

Каноничность с точки зрения теории управления

Теорема 1

Пусть система (1) имеет каноническую форму, на управление наложено ограничение $u \in U$, где U — выпуклое тело, $\tau(x)$ — время быстродействия из x в 0. Пусть $\omega = \{z : \tau(z) = 1\}$ — граница $\partial D(1)$ области достижимости в момент 1. Тогда

A) если $x(t)$ — траектория оптимального быстродействия, то $y(t) = \delta(\tau(x(t)))x(t)$ лежит в ω

B) если $\dot{x} = Ax + Bu, u \in U$ и $y(t) = \delta(\tau(x(t)))x(t)$ лежит в ω, то u — управление оптимального быстродействия

Следует из того что, $\delta(T)D(T) = D(1)$. Действительно, при фиксированном $T > 0$ преобразование $x(t) \mapsto \delta(T)x(tT)$, $u(t) \mapsto u(tT)$ переводит систему (1) в себя: Пусть $y = y(t) = \delta(T)x(tT) = \delta x$, $u = u(tT)$, тогда

$$\dot{y} = T\delta Ax + T\delta Bu = T\delta A\delta^{-1}y + T\delta Bu = Ay + Bu.$$

Конструкция В.И. Коробова

В духе теоремы (1) определим T и u, как функции от x так, чтобы вектор $y = \delta(T(x))x$ лежал на границе фиксированного эллипсоида, заменяющего $\omega = \partial D(1)$. Выберем матрицы Q, C так, что матрица $\widetilde{A} = A + BC$ устойчива, а $Q(x) = \langle Qx, x\rangle$ — общая функция Ляпунова для $\widetilde{A}$ и M. Определим $T = T(x)$, новую переменную $y = \delta(T)x$ и управление $u = u(x) = Cy$ условием

$$T(0) = 0,\ \langle Qy, y\rangle = 1 \text{ при } x \neq 0. \tag{5}$$

Определение (5) корректно, поскольку при фиксированном $x \neq 0$ аналитическая функция

$$\phi(T) = \langle Q\delta(T)x, \delta(T)x\rangle$$

убывает с ростом T, стремясь к бесконечности при $T \to 0$ и к нулю при $T \to \infty$, так как

$$\frac{d}{dT}\phi(T) = 2T^{-1}\langle Q\delta(T)x, M\delta(T)x\rangle < 0.$$

Конструкция В.И. Коробова

Уравнения движения для $y = \delta(T)x$ по поверхности эллипсоида (5) имеют вид

$$\dot{y} = T^{-1}\left(Ay + Bu + \dot{T}My\right) = T^{-1}\left(\widetilde{A}y + \dot{T}My\right). \tag{6}$$

Из (5), (6) получаем

$$\dot{T} = -\frac{\langle\{Q,\widetilde{A}\}y,y\rangle}{\langle\{Q,M\}y,y\rangle} \leq c < 0, \text{ где } \{X,Y\} = XY + Y^*X^* \tag{7}$$

Теорема 2

Пусть система (1) имеет каноническую форму, $Q(x)$ является <u>общей</u> функцией Ляпунова для $\widetilde{A} = A + BC$ и M. Тогда

A) Условие (8) определяет ограниченное управление $u(x) = C\delta(T(x))$, приводящее состояние x в 0 за время $O(T(x)) = O(\tau(x))$, где $\tau(x)$ — время быстродействия.

B) Если $\{Q,\widetilde{A}\} = \{Q,M\}$, то $T(x)$ — время движения из x в положение равновесия.

Конструкция В.И. Коробова с параметром β

В духе теоремы (1) определим T и u, как функции от x так, чтобы вектор $y = T^{-\beta}(x)\delta(T(x))x$, $\beta \geq 0$ лежал на границе фиксированного эллипсоида, заменяющего $\omega = \partial D(1)$. Пусть матрица C такова, что матрица $\widetilde{A} = A + BC$ устойчива. Пусть $Q(x) = (Qx, x)$ — общая функция Ляпунова для $\widetilde{A}$ и $M - \beta I$. Определим $T = T(x)$ и управление $u = u(x)$ условием

$$T(0) = 0; \;\; (Q\delta(T)x, \delta(T)x) = T^{2\beta}, \;\; \text{при } x \neq 0; \;\; u = C\delta(T)x. \quad (8)$$

Определение (8) корректно, поскольку при фиксированном $x \neq 0$ аналитическая функция

$$\phi(T) = T^{-2\beta}\,(Q\delta(T)x, \delta(T)x)$$

убывает с ростом T, стремясь к бесконечности при $T \to 0$ и к нулю при $T \to \infty$, так как

$$\frac{d}{dT}\phi(T) = 2T^{-1-2\beta}\,(Q\delta(T)x, (M - \beta I)\delta(T)x) < 0.$$

Конструкция В.И. Коробова с параметром β

Уравнения движения $y = \delta(T(x))x$ имеют вид

$$\dot{y} = T^{-1}\left(Ay + Bu + \dot{T}My\right). \tag{9}$$

Из (8), (9) получаем

$$\dot{T} = -\frac{\langle \{Q, \widetilde{A}\}y, y\rangle}{\langle \{Q, M - \beta I\}y, y\rangle} \le c < 0, \text{ где } \{X, Y\} = XY + Y^*X^* \tag{10}$$

Теорема 3

Пусть система (1) имеет каноническую форму, $Q(x)$ является общей функцией Ляпунова для $\widetilde{A}$ и $M - \beta I$. Тогда условие (8) корректно определяет локально ограниченное управление $u(x) = C\delta(T(x))x$, приводящее состояние x в 0 за время $O(T(x)) = O(\tau_{\min}(x)^{\frac{1}{1+\beta}})$, где $\tau_{\min}(x)$ — время быстродействия.

Если $\beta \gg 1$, то годится любая функция Ляпунова Q для $\widetilde{A}$.

Гладкие возмущения

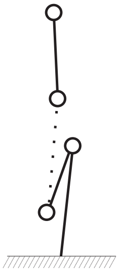
Гладко возмущенная система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + f(x) + Bu,\ f(x) = O(|x|^2) \quad x \in \mathbf{R}^N. \tag{11}$$

Теорема 4

Пусть $Q(x)$ является общей функцией Ляпунова для $\widetilde{A}$ и $M - \beta I$, $\beta > N - 3$. Тогда условие (8) корректно определяет ограниченное управление $u(x) = C\delta(T(x))x$, приводящее траектории (11) из малой окрестности 0 в 0 за конечное время.

Пример: многозвенный плоский маятник



Маятник движется в окрестности одного из 2^n положений равновесия под действием единственного управляющего момента u, приложенного к нижнему звену.
Линеаризованная система вполне управляема [8].

Задача

Построить ограниченное управление $u = u(\psi, \dot{\psi})$, приводящее маятник в терминальное положение за конечное время.

Линейные матричные неравенства (LMI)

Неравенства Ляпунова, которые требуется решить, чтобы конструкция Коробова (с $\beta = 0$) заработала, имеют билинейный вид (с неизвестными Q, C)

$$Q > 0 \tag{12}$$
$$\{Q, M\} < 0, \tag{13}$$
$$\{Q, A + BC\} < 0, \tag{14}$$

где использовано обозначение $\{X, Y\} = XY + Y^* X^*$. С помощью замены $Q \mapsto q = Q^{-1}$, $C \mapsto Y = CQ^{-1}$ вопрос сводится к разрешимости LMI с неизвестными q, Y

$$q > 0 \tag{15}$$
$$\{M, q\} < 0, \tag{16}$$
$$\{A, q\} + \{B, Y\} < 0, \tag{17}$$

где q — симметрическая, а Y — произвольная матрица.

Теорема 5

Система линейных матричных неравенств (15), (16), (17) имеет решение.

Из теоремы Ляпунова следует, что системы (15), (16) и (15), (17) имеют решение. Пусть q, Y — решение системы (15), (17). Тогда пара $\widetilde{q}$, $\widetilde{Y}$, где

$$\widetilde{q} = \int\limits_1^\infty \delta(T) q \delta(T)^* \frac{dT}{T}, \quad \widetilde{Y} = \int\limits_1^\infty Y \delta(T)^* \frac{dT}{T},$$

дает решение системы (15), (16), (17).

Общая функция Ляпунова со специальными свойствами

Согласно теореме 2 B), чтобы функция $T(x)$ равнялась времени движения из x в нуль необходимо и достаточно равенство матриц $\{Q, \widetilde{A}\} = \{Q, M\}$. Это равенство можно переписать в виде

$$\{B, Y\} = \{M - A, q\}. \tag{18}$$

Положим $Y = -\frac{1}{2}B^*$, тогда матрица $R = -\{B, Y\} = BB^*$ — неотрицательно определенная. Матрицу q можно найти по формуле Ляпунова:

$$q = \int_0^\infty e^{t(M-A)} R e^{t(M-A)^*} dt, \tag{19}$$

Можно проверить, что пара q, Y — решение LMI (15), (16), (17) и (18). Более того, это решение выписывается явно.

V — пространство, сопряженное к пространству многочленов степени $< N$ от переменного t. Оператор $A = -\frac{\partial}{\partial t}^*$ действует на функционал x по формуле $Ax(f) = -x(\frac{\partial}{\partial t}f)$, аналогично действует $M = -\left(\frac{\partial}{\partial t}t\right)^*$, $B(f) = f(0)$. Оператор $\delta = \delta(T)$ действует по формуле $\delta(T)x(f) = x(f_T)$, где $f_T(t) = \frac{1}{T}f(\frac{x}{T})$. Функциональное пространство V имеет естественный базис e_i, где $e_i(t^{j-1}) = \delta_{ij}$. В этом базисе

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & -2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -(N-1) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

$$\delta(T) = \mathrm{diag}(T^1, T^2, \ldots, T^N)^{-1}, \quad M = -\,\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, N). \tag{21}$$

Функциональная модель II

Определим матрицы

$$
\begin{aligned}
&q = (q_{ij}),\ q_{ij} = \int_0^1 x^{i+j-2}(1-x)dx = [(i+j)(i+j-1)]^{-1},\\
&Q = q^{-1}, \quad C = -\tfrac{1}{2}B^*Q
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Функция $T = T(x)$ и управление по обратной связи $u = u(x)$ определены неявно формулами

$$
\langle Q\delta(T)x, \delta(T)x\rangle = 1, \quad u(x) = C\delta(T)x, \ \text{при } x \neq 0. \tag{23}
$$

Теорема 6

A) Матрица Q задает общую квадратичную функцию Ляпунова для матриц M и $A + BC$.

B) Уравнение (23) однозначно определяет $T = T(x)$.

C) Управление (23) ограничено: $|u| \leq \frac{1}{2}\sqrt{Q_{11}} = \frac{1}{2}\sqrt{N(N+1)}$.

D) Управление (23) переводит точку x в 0 за время $T(x)$.

Функциональная модель III

Теорема 7

A) Матрица Q — целочисленная и четная,

B) $Q_{11} = N(N+1)$

Гипотеза

Все матричные элементы Q_{ij} делятся на $Q_{11} = N(N+1)$

Пример

$$N = 4,\ Q_{11} = 20,\ Q = \begin{pmatrix} 20 & -180 & 420 & -280 \\ -180 & 2220 & -5880 & 4200 \\ 420 & -5880 & 16800 & -12600 \\ -280 & 4200 & -12600 & 9800 \end{pmatrix}$$

Борьба с возмущениями

Рассмотрим каноническую систему (20) с ограниченными скалярными неконтролируемыми возмущениями

$$\dot{z} = Az + B(u + v). \tag{24}$$

Теорема 8

Пусть модуль возмущения v удовлетворяет неравенству $|v| < \frac{1}{2\sqrt{N(N+1)}}$, тогда управление $u(x) = C\delta(T(x))x$ (см. (23)) приводит любое начальное состояние в нуль за конечное время.

Литература I

1. Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с импульсным управлением, ДАН, 434(2010), 3, 1—5.
2. Ovseevich Alexander. A Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium. JOTA Vol. 165, Issue 2 (2015), 532–544
3. Brunovsky P. A Classification of Linear Controllable Systems, Kibernetika 6, 6(1970), 3, 176—188
4. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости, Матем. Сборник, 109(151) (1979), 4, 582–606

Литература II

5. Коробов В.И., Скорик В.А., Чоке Риверо А.Е. Функция управляемости как время движения I, Матем. физика, анализ, геометрия, 11(2004), 2, 208–225
6. В.И. Коробов, В.А. Скорик, А.Е. Чоке Риверо. Функция управляемости как время движения. II, Математическая физика, анализ, геометрия, 2004, т. 11, 3, с. 341—354.
7. A. Fedorov, A. Ovseevich. Asymptotic control theory for a system of linear oscillators. Moscow Math. J. 16, (2016) 561-598
8. Габриелян М.С., Красовский Н.Н. К задаче о стабилизации механической системы //ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 801–811.