

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКОЛЬЗЯЩИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**А.Н. Жирабок**

*Дальневосточный федеральный университет*  
Россия, 690090, Владивосток, ул. Суханова, 8  
E-mail: [zhirabok@mail.ru](mailto:zhirabok@mail.ru)

**А.В. Зуев**

*Институт автоматизации и процессов управления*  
Россия, 690041, Владивосток, ул. Радио, 5  
E-mail: [zuev@dvo.ru](mailto:zuev@dvo.ru)

**А.Е. Шумский**

*Дальневосточный федеральный университет*  
Россия, 690090, Владивосток, ул. Суханова, 8  
E-mail: [a.e.shumsky@yandex.com](mailto:a.e.shumsky@yandex.com)

**Ключевые слова:** линейные системы, диагностирование, идентификация дефектов, скользящие наблюдатели.

**Аннотация:** Рассматривается задача функционального диагностирования технических систем, описываемых линейными динамическими моделями, в присутствии возмущений. Для решения задачи идентификации дефектов используется метод на основе скользящих наблюдателей. Предлагается модификация этого метода, позволяющая ослабить ограничения на его реализацию по сравнению с известными работами.

## 1. Введение

Рассматривается задача функционального диагностирования (ФД) технических систем, описываемых линейными динамическими моделями, в присутствии возмущений. Задача ФД интенсивно исследуется уже более 30 лет, было разработано несколько методов диагностирования – диагностические наблюдатели, фильтры Калмана, соотношения паритета, идентификация. Одним из методов идентификации является метод, основанный на специальных наблюдателях, использующих особенности скользящего режима [1].

Скользящие наблюдатели применяются для решения задачи идентификации дефектов в линейных и нелинейных системах [2-7], в ряде практических приложений [8-10]. В настоящей работе по аналогии с [5] рассматриваются линейные системы, для которых решается задача идентификации дефектов в присутствии возмущений, но при наложении менее жестких, нежели в [5], ограничений на класс рассматриваемых систем. Кроме того, предлагаемый подход позволяет добиться уменьшения сложности средств диагностирования.

## 2. Основные соотношения

Рассмотрим класс технических систем, описываемых линейной моделью

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + Dd(t) + L\rho(t), \quad y(t) = Hx(t).$$

Здесь  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^l$  – векторы состояния, управления и выхода;  $F \in R^{n \times n}$ ,  $G \in R^{n \times m}$ ,  $D \in R^{n \times q}$ ,  $L \in R^{n \times p}$  и  $H \in R^{l \times n}$  – известные постоянные матрицы;  $d(t) \in R$  – функция, описывающая дефекты: при их отсутствии  $d(t) = 0$ , при появлении дефекта  $d(t)$  становится неизвестной функцией времени;  $\rho(t) \in R^p$  – вектор, описывающий действующие на систему возмущения,  $\rho(t)$  предполагается неизвестной функцией времени.

В отличие от [2-7], где скользящий наблюдатель строится на основе исходной системы (1), предлагаемый подход опирается на редуцированную модель системы (1), которая в общем случае описывается уравнением

$$(2) \quad \dot{x}_*(t) = F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + D_*d(t) + L_*\rho(t), \quad y_*(t) = H_*x_*(t),$$

где  $x_* \in R^k$  – вектор состояния,  $F_*$ ,  $G_*$ ,  $J_*$ ,  $H_*$ ,  $D_*$  и  $L_*$  – постоянные матрицы. Предполагается, что при отсутствии дефектов и возмущений выполняются равенства  $x_*(t) = \Phi x(t)$  и  $y_*(t) = R_*y(t)$  для некоторых матриц  $\Phi$  и  $R_*$ , удовлетворяющих условиям

$$(3) \quad \Phi F = F_*\Phi + J_*H, \quad R_*H_* = H\Phi, \quad G_* = \Phi G, \quad D_* = \Phi D, \quad L_* = \Phi L.$$

Рассмотрим метод построения модели (2) минимальной размерности, не чувствительной к возмущениям, на основе которой может быть построен скользящий наблюдатель. Для этого матрицы  $F_*$  и  $H_*$  ищутся в канонической форме следующего вида:

$$(4) \quad F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Известно [11, 12], что условие нечувствительности к возмущениям имеет вид  $\Phi L = 0$ ; можно показать [11, 12], что оно может быть представлено в форме

$$(5) \quad (R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})(V^{(k)} \quad B^{(k)}) = 0,$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}, \quad B^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & HF^2L & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & HFL & HF^{k-2}L \\ 0 & 0 & HL & HF^{k-3}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (5) имеет нетривиальное решение, если  $\text{rank}(V^{(k)} \quad B^{(k)}) < l(k+1)$ . Из последнего условия определяется минимальная размерность  $k$ , при которой уравнение (5) имеет решение, находится решение этого уравнения, из (3) определяется матрица  $\Phi$  и принимается  $G_* = \Phi G$ ,  $D_* = \Phi D$ .

## 3. Построение скользящего наблюдателя

По аналогии с [5] скользящий наблюдатель ищется в виде

(6)  $\dot{\hat{x}}_*(t) = F_*\hat{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + D_*v(t) - Ke_y(t)$ ,  $\hat{y}_*(t) = H_*\hat{x}_*(t)$ ,  
 где матрица  $K$  выбирается так, чтобы  $F_{**} = F_* - KH_*$  стала устойчивой матрицей,

$$v(t) = \begin{cases} -g \frac{Qe_y(t)}{\|Qe_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_*(t) = \hat{y}_* - R_*y(t)$  – ошибка по выходу; правила выбора матрицы  $Q$  и положительного скаляра  $g$  обсуждаются ниже. Отметим, что поскольку матрицы  $F_*$  и  $H_*$  ищутся в каноническом виде (4), матрица  $K$  всегда существует. В отличие от работы [5], где строятся два скользящих наблюдателя, предлагаемый подход позволяет обойтись одним.

Введем ошибку по состоянию  $e(t) = \hat{x}_*(t) - x_*(t)$ ; нетрудно видеть, что  $e_y(t) = H_*e(t)$ . Используя (2) и (6), запишем уравнение динамики ошибки  $e(t)$ :

$$(7) \quad \dot{e}(t) = F_*e(t) + D_*(v(t) - d(t)) - Ke_y(t) = F_{**}e(t) + D_*(v(t) - d(t)).$$

По аналогии с [5] предполагается, что существуют матрица  $Q$  и симметрическая положительно определенная матрица  $P$  такие, что

$$(8) \quad PD_* = H_*^T Q^T.$$

Скаляр  $g$  выбирается из условия  $g > \|d(t)\|$ .

Так как матрица  $F_{**}$  устойчива, то существует симметрическая положительно определенная матрица  $W$  такая, что  $F_{**}^T P + PF_{**} = -W$ .

**Теорема.** При указанном выборе матрицы  $Q$  и скаляра  $g$  наблюдатель (6) сходится асимптотически, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Поскольку в скользящем режиме  $\dot{e}(t) = 0$  и  $e(t) = 0$ , то из уравнения (7) следует  $D_*(v(t) - d(t)) = 0$ , и функция  $d(t)$  может быть оценена в виде

$$d(t) = -g \frac{Qe_y(t)}{\|Qe_y(t)\| + \delta},$$

где  $\delta$  – малая положительная константа.

## 4. Пример

Рассмотрим линеаризованную модель электропривода [6]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= k_1 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= k_2 x_3(t) + \rho(t), \\ \dot{x}_3(t) &= k_3 x_2(t) + k_4 x_3(t) + k_5 u(t), \end{aligned}$$

где  $x_1 = \alpha_n$ ,  $x_2 = \dot{\alpha}$ ,  $x_3 = I$ ,  $k_1 = 1/i_p$ ,  $k_2 = k_M/J$ ,  $k_3 = -k_\omega/L$ ,  $k_4 = -R/L$ ,  $k_5 = k_u/L$ ,  $I$  – ток якоря,  $R$  – активное сопротивление цепи якоря,  $L$  – индуктивность цепи якоря,  $k_\omega$  – коэффициент противо-э.д.с.,  $k_u$  – коэффициент усиления усилителя мощности,  $k_M$  – коэффициент крутящего момента,  $J$  – момент инерции вала электродвигателя и вращающихся частей редуктора,  $\alpha_n$  – угол поворота выходного вала редуктора,  $\dot{\alpha}$  – скорость вращения ротора электродвигателя,  $i_p$  – передаточное отношение редуктора,  $u(t)$  – напряжение на входе усилителя мощности.

Полагая, что измеряемыми являются переменные  $x_1$  и  $x_3$ , а дефект моделируется изменением коэффициента  $k_4$ , что соответствует изменению активного сопротивления цепи якоря электродвигателя (например, при его значительном нагреве), рассматриваемую модель опишем следующими матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что поскольку  $HL = 0$ , то условие  $\text{rank}(HL) = \text{rank}(L)$ , необходимое для применения подхода, предложенного в [5], здесь не выполняется.

Построим модель, не чувствительную к возмущению. Примем  $k = 1$ , тогда

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_3 & k_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что уравнение (5) имеет решение с матрицами  $R_* = (k_3 \quad -k_1)$ ,  $J_* = (0 \quad -k_1 k_4)$  откуда  $\Phi_* = (k_3 \quad 0 \quad -k_1)$  и  $G_* = -k_1 k_5$ . Модель (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= -k_1 k_4 y_2(t) - k_1 k_5 u(t), \\ y_*(t) &= x_*(t), \end{aligned}$$

где  $x_* = k_3 x_1 - k_1 x_3$ . Так как  $\Phi_* D = -k_1 \neq 0$ , построенная модель чувствительна к рассматриваемому дефекту.

Из канонической формы (4) получаем  $H_* = 1$ ; примем  $K := b < 0$ . Из (8) следует, что можно принять  $Q := -k_1$  и  $P := 1$ ; в результате скользящий наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_*(t) &= -k_1 k_4 y_2(t) - k_1 k_5 u(t) - b e_y(t) + v(t), \\ \hat{y}_*(t) &= \hat{x}_*(t), \end{aligned}$$

где  $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - (k_3 y_1(t) - k_1 y_2(t))$ ,

$$v(t) = \begin{cases} g \frac{k_1 e_y(t)}{\|k_1 e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$g > \|d(t)\|$ . Оценка функции  $d(t)$  дается выражением

$$(9) \quad d(t) = g \frac{k_1 e_y(t)}{\|k_1 e_y(t)\| + \delta}.$$

При моделировании задавались следующие значения параметров следящего электропривода:  $J = 0,0001 \text{ Kgm}^2$ ,  $k_\omega = 0,02 \text{ Vc}$ ,  $k_u = 100$ ,  $R = 0,4 \Omega$ ,  $L = 0,004 \text{ H}$ ,  $k_M = 0,02 \text{ Nm/A}$ ,  $i_p = 100$ . Возмущение  $\rho(t)$  имитировалось действием внешнего нагрузочного момента величиной  $\tilde{M}(t) = 0,1 \sin(0,8t) \text{ Nm}$  на интервале  $1 \div 10 \text{ c}$ ; дефект имитировался изменением активного сопротивления якоря на величину  $\tilde{R}(t) = 0,2 \sin(0,2t - 0,8)$  на интервале  $2 \div 8 \text{ c}$ .

На рис. 1 представлены результаты моделирования, символом 1 отмечена функция  $\tilde{R}(t)$ , символом 2 – ее оценка, полученная согласно формуле (9). Поскольку на интервалах  $0 \div 2 \text{ c}$  и  $8 \div 10 \text{ c}$  значения оценок равны нулю, ясно, что построенный наблюда-

тель не чувствителен к возмущению  $\rho(t)$ .

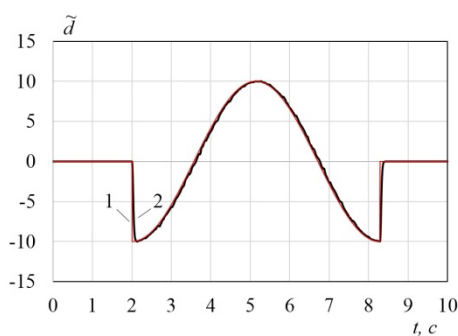


Рис. Результаты моделирования.

## 6. Заключение

В работе для решения задачи идентификации дефектов использован метод на основе скользящих наблюдателей. Предложенная модификация этого метода позволила ослабить ограничения, накладываемые на условия его реализации, для решения указанных задач при наличии возмущений и уменьшить сложность средств диагностирования по сравнению с известными методами. Полученная оценка величины дефекта может быть использована для обеспечения свойства отказоустойчивости системы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проекты 16-19-00046 П (разработан метод построения скользящих наблюдателей) и 18-79-00143 (выполнен синтез наблюдателей для диагностирования электроприводов)).

## Список литературы

1. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
2. Edwards C., Spurgeon S. On the development of discontinuous observers // International Journal of Control. 1994. Vol. 59. P. 1211-1229.
3. Edwards C., Spurgeon S., Patton R. Sliding mode observers for fault detection and isolation // Automatica. 2000. Vol. 36. P. 541-553.
4. Yan X., Edwards C. Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding modes observer // Automatica. 2007. Vol. 43. P. 1605-1614.
5. He J., Zhang C. Fault Reconstruction based on sliding mode observer for nonlinear systems // Mathematical Problems in Engineering. 2012. P. 1-22.
6. Brahim A., Dhahri S., Hmida F., Sellami A. Simultaneous actuator and sensor faults reconstruction based on robust sliding mode observer for a class of nonlinear systems // Asian Journal of Control. 2017. Vol. 19. P. 362-371.
7. Alwi H., Edwards C. Fault tolerant control using sliding modes with on-line control allocation // Automatica. 2008. Vol. 44. P. 1859-1866.
8. Chandra K., Alwi H., Edwards C. Fault reconstruction for a quadrotor using an LPV sliding mode observer // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, No. 21. P. 374-379.
9. Meziane H., Labarre C., Lefteriu S., Djemai M. Fault detection and isolation for a multi-cellular converter based on sliding mode observer // Proceedings IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, No. 21. P. 164-170.
10. Mohamed M., Yan X-G., Spurgeon S., Jiang B. Robust sliding mode observer design for interconnected systems with application to multimachine power systems // Proceedings of the IEEE CDC, Conference on Decision and Control. Las Vegas, USA, 2016. P. 6246-6251.
11. Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В. Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // Автоматика и телемеханика. 2017. № 7. С. 3-21.

12. Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suvorov A. Fault detection in nonlinear systems via linear methods // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2017. Vol. 27. P. 261-272.