

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМА КОЛЕБАНИЙ ЗООПЛАНКТОНА МЕТОДАМИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О.А. Кузенков

Институт информационных технологий, математики и механики ННГУ Н.И. Лобачевского
Россия, 603950, Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
E-mail: kuzenkov_o@mail.ru

Ключевые слова: система авторепродукции, оптимальное управление, критерий оптимальности, функция приспособленности, эволюционно устойчивое поведение, ежедневные вертикальные миграции, зоопланктон.

Аннотация: Предлагается новый подход формирования критерия оптимальности стратегии управления для систем авторепродукции. На основе предложенного подхода решена задача поиска эволюционно устойчивой стратегии ежедневных вертикальных перемещений зоопланктона как задача оптимального управления с фазовыми ограничениями.

1. Введение

В современной теории под управлением понимается целенаправленное воздействие на систему. Изучение моделей управляемых систем, так или иначе, подразумевает формализацию целей управления. Особое значение формализация целевого функционала имеет в задачах оптимального управления и является неотъемлемой составляющей постановки оптимизационной задачи. Для достаточно сложной реальной системы не всегда ясно, какую именно величину следует выбрать в качестве целевого функционала. Ошибки такого выбора нередко приводят к потере адекватности решения. Наиболее сложный класс управляемых систем представляет случай, когда система сама определяет критерии своего поведения. Первые математические модели таких систем рассматривались Р. Акофом и были названы целеустремленными системами. К таким системам, относятся например, живые системы, социальные системы и т.п.

При всем разнообразии целей, которые реализует такая система, всегда наиболее существенной является сохранение ею собственного существования. Достижение этой цели является необходимым условием для достижения всех остальных. Проблема сохранения существования управляемой системы в течение заданного ограниченного времени была формально поставлена как задача выживания. Первые математические результаты по решению такой задачи были получены в работах Т. Нагумо. Но достижение этой цели на неограниченном интервале времени, казалось бы, невозможно, поскольку время существования всех реальных систем ограничено.

Однако задача обеспечения неограниченно долгого существования, тем не менее, имеет практический смысл для одного специфического класса систем. Это системы авторепродукции или самовоспроизводящиеся (репликаторные) системы [1]. Системой

авторепродукции называется совокупность объектов, которой обладают свойством генерировать свои копии в процессе существования – передавать другим объектам свои качественные признаки, в частности, тот или иной способ поведения. Центральным свойством таких систем является наследование признаков. Первые математические модели самовоспроизводящихся систем были предложены фон Нейманом. Достаточно общее математическое описание процессов наследования было дано А.Н. Горбанем.

Несмотря на то, что время существования каждого отдельного объекта в системе авторепродукции конечно, совокупность в целом потенциально может обеспечить неограниченное время существования (в рамках адекватности рассматриваемой модели). Те виды поведения, которые поддерживают воспроизводство объектов, их реализующих, постепенно будут исчезать вместе с этими объектами и вытесняться более эффективными видами поведения. Среди различных наследуемых видов поведения постепенно в системе остаются только те, которые могут обеспечить системе неограниченно длительное существование. Наилучшим является та стратегия, которая сохраняется в системе неограниченно долго, вытесняя другие из системы. Такая стратегия называется эволюционно устойчивой. В частности, именно такой механизм отражен в Дарвиновской идее выживания наиболее приспособленных организмов.

Целью настоящей работы является математическая формализация критерия оптимальности поведения для общих систем авторепродукции и решение на основе этого задачи оптимального управления для определения эволюционно устойчивого поведения. Применение предложенного подхода демонстрируется на примере задачи поиска эволюционно устойчивого режима ежедневных вертикальных миграций зоопланктона.

2. Математическая формализация критерия оптимальности

Чтобы исследовать и решать задачи управления в системах авторепродукции, прежде всего, необходима математическая формализация критерия оптимальности, который отражает цель – неограниченно долгого сохранения существования системы.

Пусть V – множество различных видов v наследственного поведения в некоторой системе авторепродукции. Пусть V является компактным метрическим пространством. Пусть, кроме того, в пространстве V введена регулярная положительная борелевская мера, которая позволяет численно характеризовать величину разных совокупностей наследственного поведения. Причем эта мера не должна быть тривиальной: мера каждого открытого непустого множества больше нуля. Пусть каждому виду v соответствует некоторая неотрицательная величина $\rho(v, t)$, численно характеризующая присутствие этого вида в системе в момент времени t . Указанная величина удовлетворяет следующим требованиям: является гладкой функцией времени, непрерывной функцией от v ; ее стремление к нулю соответствует исчезновению данного вида в системе; интеграл от этой величины по множеству V относительно введенной меры равномерно ограничен во времени. Последнее предположение соответствует отсутствию неограниченного роста системы авторепродукции.

В паре видов v' и w' с ненулевыми значениями показателя ρ вид v' считается более предпочтительным, чем w' ($v' > w'$), если существуют окрестности $O(v')$ и $O'(w')$ точек v' и w' в пространстве V такие, что отношение $\rho(w, t)/\rho(v, t)$ стремится к нулю при t , стремящемся к бесконечности, равномерно для всех $v \in O(v')$, $w \in O'(w')$. В этом случае вид w' будет постепенно вытесняться из системы ($\rho(w', t) \rightarrow 0$). Таким образом, на множестве видов наследственного поведения вводится отношение порядка, отражающее селективные преимущества разных видов поведения [2]. Функция $J(v)$, отражаю-

шая введенный порядок предпочтительности (т.е. $J(v') > J(w') \leftrightarrow v' > w'$), является критерием оптимальности поведения системы самовоспроизводящихся объектов.

Такой подход дает возможность построения критерия оптимальности в системах авторепродукции для самых разных предметных областей, например, функции приспособленности биологических видов, функции конкурентоспособности товаров и экономических предприятий и т.п.

Используя введенный критерий, можно сформулировать вариационный принцип для определения эволюционно устойчивого поведения: эволюционно устойчивым (т.е. сохраняющимся в системе с течением времени) будет только то поведение, которые реализуют максимум функции приспособленности [3]. Задача поиска эволюционно устойчивых стратегий поведения среди всего разнообразия возможных наследственно обусловленных стратегий сводится к задаче максимизации введенного критерия оптимальности, то есть к задаче оптимального управления.

На основе сформулированного вариационного принципа можно прогнозировать долгосрочное поведение системы авторепродукции подобно тому, как движение механических систем находится на основе вариационных принципов Эйлера-Лагранжа.

Для того, чтобы адекватно ввести порядок предпочтительности в конкретной рассматриваемой системе и, соответственно, определить критерий оптимальности, необходимо учесть взаимосвязи между ее объектами и внешней средой, аналогично тому, как в механике для вывода закона движения нужно учесть разнообразные взаимосвязи между механическими телами. Эти взаимосвязи могут выражаться как алгебраически, так и дифференциальными уравнениями.

Для ряда релевантных моделей систем авторепродукции удается вывести критерий оптимальности аналитически или построить численно его аппроксимацию. В частности, было получено выражение функции приспособленности для ряда биологических систем, удовлетворяющих классическим гипотезам Ферхюльста, фон-Ферстера, Вольterra и т. п. [4-6]. С помощью этой функции можно найти эволюционно устойчивое поведение в таких системах.

3. Задача определения эволюционно устойчивых миграций зоопланктона

Разработанная методика была применена для решения задачи поиска эволюционно устойчивых ежедневных вертикальных миграций зоопланктона. Явление повторяющихся каждые сутки вертикальных перемещений водных организмов было обнаружено почти двести лет тому назад. Суточные вертикальные перемещения зоопланктона играют важную роль в динамике органического вещества мирового океана, являются самым значительным синхронным движением биомассы на Земле и потенциально могут оказывать воздействие на климат Земли. Выявление причин и механизмов формирования таких явлений представляет актуальную задачу для современной экологии. Эффект суточных вертикальных перемещений зоопланктона исследовался многими учеными как эмпирически, так и теоретически, но механизмы, формирующие особенности миграционного поведения зоопланктона остаются до конца не выясненными [7].

Пусть v – вертикальная координата положения зоопланктона, t – время, измеряющееся в сутках (от 0 до 1). Множество V наследственных стратегий поведения $v(t)$ есть множество гладких функций на отрезке $[0,1]$, удовлетворяющих равенству $v(0) = v(1)$.

Было показано, что при выполнении для популяции зоопланктона гипотез Ферхюльста функция приспособленности (критерий оптимальности) в зависимости от реализуемой наследственной стратегии поведения имеет вид

$$R(v) = \int_0^1 (\alpha E(v, t) - \beta Q - \gamma S(v, t) - \delta G(v, t)) dt,$$

где $E(v)$ – количество пищи в зависимости от глубины; Q – энергетические затраты на осуществление перемещений, равные квадрату скорости $(v'(t))^2$, $S(v, t)$ – влияние хищника в зависимости от глубины и времени суток, $G(v)$ – распределение температуры в зависимости от глубины; весовые коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ отражают степень влияния соответствующего фактора на коэффициент размножения. Кроме того, очевидно, что скорость перемещения зоопланктона и глубина погружения ограничены: $|v'(t)| \leq C, -K \leq v(t) \leq 0$.

Задача нахождения эволюционно устойчивого режима миграций сводится к задаче оптимального управления с целевым функционалом $R(v)$ и фазовыми ограничениями. Если все факторы влияния известны, то можно решать поставленную задачу на основе принципа максимума Понтрягина.

Пусть функция влияния хищника имеет вид $S(v, t) = S_0(v) \cos(2\pi t)$, где функция $S(v)$ отражает количество хищника в зависимости от глубины, а $\cos(2\pi t)$ описывает активность хищника в зависимости от времени суток. Пусть функции E, S_0, G – линейные или кусочно-линейные, тогда сопряженные функции и функция Гамильтона находятся аналитически. В этом случае аналитически определяется структура оптимальной стратегии. Она состоит из режимов погружения и подъема с постоянной максимальной скоростью, пребывания в самом верхнем и самом нижнем допустимых слоях воды и гладкого перехода с одного режима на другой. Этот результат хорошо согласуется с данными натуральных наблюдений.

4. Заключение

В работе для общих систем авторепродукции предложен новый подход формализации цели управления, понимаемой как обеспечение неограниченного долгого существования системы. Этот подход позволяет сформировать критерий оптимальности стратегии управления в такой системе. На основе предложенного подхода решена задача поиска эволюционно устойчивой стратегии ежедневных вертикальных перемещений зоопланктона как задача оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (Project No. 14.Y26.31.0022).

Список литературы

1. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Критерий оптимальности управления в системах авторепродукции // Труды XII Всероссийского Собрания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 725-733.
2. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Предельные возможности решения управляемой системы с наследованием // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 514-523.
3. Kuzenkov O., Ryabova E. Variational Principle for Self-replicating Systems // Math. Model. Nat. Phenom. 2015. V. 10, No. 2. P. 115-128.
4. Кузенков О.А., Кузенкова Г.В. Оптимальное управление системами авторепродукции // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 26-37.
5. Кузенков О.А. Задача оптимального управления для распределенной системы типа Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2006. № 7. С. 14-26.

6. Кузенков О.А. Исследование задач управления динамикой популяций на основе обобщенной модели Колмогорова // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2009. № 5. С. 169-176.
7. Morozov A.Y., Kuzenkov O.A. Towards developing a general framework for modelling vertical migration in zooplankton // Journal of Theoretical Biology. 2016. Vol. 405. P. 17-28.