УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ПИЩЕВОЙ ЦЕПИ

И.В. Рублев
МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: iroublev@cs.msu.su

Т.Е. Морозова
МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: tmoroz0077@gmail.com

Ключевые слова: задача управления, пищевая цепь, модель хищник-жертва, синтез управления.

Аннотация: Настоящий доклад посвящен задаче управления для четырехмерной пищевой цепи без внутривидовой конкуренции. В рамках представленной работы авторы рассматривают задачу приведения системы в ε-окрестность множества положений равновесия за конечное время. Предложен и исследован метод синтеза управления, решающего поставленную задачи.

1. Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1 x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4 x_3), \end{cases}$$

где $x_i, i=\overline{1,4}$ – численности популяций видов, $r_1 + u_1$ –показатель рождаемости первого вида, $r_2, r_3 - u_2, r_4$ –показатели смертности остальных видов, коэффициенты b_1, b_2, b_3 и c_2, c_3, c_4 отвечают за взаимодействие между популяциями разных видов. Все параметры строго положительны, а управления берутся из интервалов $U_1^* = [u_1^{\min}, u_1^{\max}], U_2^* = [u_2^{\min}, u_2^{\max}]$ соответственно. Управление можно интерпретировать как интенсивность отлова или увеличения кормовой базы соответствующего вида, в зависимости от того, каков его знак. Для данной системы рассматривается задача приведения ее за конечное время в одно из возможных положений равновесия, в котором численность популяции каждого вида останется положительной.

Данная модель трофической (пищевой) цепи в некотором смысле обобщает классическую модель динамики популяций типа «хищник-жертва» ([1, 2]). Различные модели подобного вида изучались в различных работах, в основном посвященных качественному исследованию динамики соответствующих систем без управления (например, [2-7]). В данной работе исследуется влияние управления в указанной модели пищевой цепи. Результаты [7], касающиеся моделей пищевых цепей в отсутствие управления, говорят о том, что системы четного и нечетного порядка подобного вида весьма сильно различаются по своим свойствам. А именно, в общем положении параметров модели (то есть исключая некоторые вырожденные случаи) лишь системы четного порядка имеют изолированные положения равновесия и являются биологически устойчивыми в том смысле, что ни у одного из видов численность не стремится к нулю, то есть все виды выживают. Поэтому весьма логичным представляется исследование именно четырехмерной пищевой цепи, как системы минимальной размерности, большей двух, обладающей свойством биологической устойчивости.

Управляющие параметры входят в показатели естественных роста и смертности первого и третьего вида, соответственно, так как это является обобщением двумерного случая: мы можем рассматривать четырехмерную систему, как две двумерные со введенной дополнительной связью между второй и третьей компонентой.

Сложность исследования данной четырехмерной системы по сравнению с двумерной заключается в трудности изучения ее траекторий. В модели хищник-жертва поведение траекторий полностью характеризуется первым интегралом, чего нет в четырехмерной системе. Вследствие этого возникает вопрос, как исследовать и решать задачу, исходя лишь из свойств первого интеграла, найденного в работе [7], отвечающего постоянным значениям управлений. Настоящая работа отвечает на этот вопрос и предлагает метод решения, исходящий из принципа минимизации первого интеграла и построения соответствующих позиционных управлений.

Таким образом, основной целью данной работы является исследование свойств рассматриваемой системы и синтез управления для задачи попадания в ε-окрестность множества положений равновесия за конечное время. Предложен и исследован метод приближения к положению равновесия и доказано, что предложенный синтез позволяет решить задачу за конечное время для любого начального положения системы.

2. Общие свойства системы

2.1. Множество положений равновесия

Рассмотрим положения равновесия (1) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)),$$

где

$$P_1(u) = \frac{r_2 c_4 + b_2 r_4}{c_2 c_4}, \ P_2(u) = \frac{r_1 + u_1}{b_1},$$

$$P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u_1) + (u_2 - r_3) b_1}{b_1 b_3}.$$

Множество положений равновесия $\overline{P} = \{P(u) : u \in U^*\}$ представляет из себя параллелограмм в пространстве (x_2, x_4). В нашей работе мы предполагаем, что оно непустое, для этого введем ограничение на параметры задачи:

$$P_4(u_1^{\min}, u_2^{\min}) > 0.$$

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (1) во множество $\overline{P}$ при кусочно-непрерывном управлении из U_1^*, U_2^*.

2.2. Первый интеграл системы и синтез управления

В работе [7] найден первый интеграл четырехмерной системы без управления:

$$K(x) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2 \ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4 \ln x_4).$$

Подставив в $K(x)$ вместо P функцию $P(u)$, получим функцию $K(x \mid u)$, которая будет являться первым интегралом системы (1) при постоянных значениях управления.

Утверждение 1. *Функция $K(x \mid u)$ сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве R_+^4, а ее глобальный минимум достигается в точке $P(u)$.*

Следствие. *Приближение к положению равновесия равносильно уменьшению $K(x \mid u)$.*

Предложен способ построения управления таким образом, чтобы уменьшать $K(x \mid u)$ и тем самым приближаться к положению равновесия. Посчитаем производную $\frac{dK(x \mid u^0)}{dt}$ при некотором $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ в силу системы (1) и будем ее минимизировать:

$$\frac{dK(x \mid u^0)}{dt} = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(u_2 - u_2^0)(x_3 - P_3) + (u_1 - u_1^0)(x_1 - P_1) \to \min_{u_1 \in U_1^*, u_2 \in U_2^*}.$$

Заметим, что равновесие по x_1 и x_3 разделяет все пространство на четыре области, в каждой из которых будет своя точка минимума. Беря управление, доставляющее минимум производной $\frac{dK(x \mid u^0)}{dt}$ в соответствующей области, мы будем уменьшать $K(x \mid u)$ до тех пор, пока не попадем на положение равновесия, где величина $K(x \mid u)$ станет постоянной.

2.3. Скользящие режимы

Особенностью этого метода является то, что неопределенность возникает на самих гиперплоскостях $x_1 = P_1, x_3 = P_3$, а при подстановке полученных управлений в уравнения системы мы получим уравнения с разрывной правой частью ([8]). В подобного рода системах возникают скользящие режимы. Рассмотрим, в каких случаях они возникают в нашей системе, и осуществим регуляризацию скользящего режима таким образом, чтобы траектория не покидала гиперплоскости переключения.

Утверждение 2. *Пусть в (1) нет скользящего режима по x_3. Тогда скользящий режим по x_1 возникает при*

$$\begin{cases} x_1 = P_1, \\ P_2(u_1^{\min}) < x_2 < P_2(u_1^{\max}). \end{cases}$$

Если положить $u_1 = u_1^c = b_1 x_2 - r_1$, то разрыв в правой части (1) при введенном управлении будет устранен.

Утверждение 3. *Пусть в (1) нет скользящего режима по x_1. Тогда скользящий режим по третьей координате возникает, если*

$$\begin{cases} x_3 = P_3, \\ d_{\min}(x_2) = \dfrac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{\min}}{b_3} < x_4 < \dfrac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{\max}}{b_3} = d_{\max}(x_2). \end{cases}$$

Если $u_2 = u_2^c = r_3 + b_3 x_4 - c_3 x_2$, то разрыв в правой части будет устранен.

Замечание. *Мы рассматриваем скользящие режимы либо по первой, либо по третьей координате, одновременное скольжение по обеим координатам эквивалентно нахождению в одном из положений равновесия, а значит, задача решена.*

3. Основной результат

Сформулируем основную теорему данной работы, показывающую конечность времени попадания в окрестность множества положений равновесия при использовании вышеизложенного подхода к синтезу управления.

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует такое допустимое управление* $u = (u_1, u_2)$, *что из любого начального положения* x^0 *система (1) придет в* ε*-окрестность положения равновесия за конечное время.*

Поскольку детальные выкладки, обосновывающую данную теорему, весьма громоздки, приведем несколько соображений, используемых при доказательстве данной теоремы.

1. Если система находится вне ε-окрестности положения равновесия по первой или третьей координате, то величина производной $\dfrac{dK(x\,|\,u^0)}{dt}$ будет достаточно большой по модулю (можно отделить ее от нуля), таким образом система будет быстро приближаться к положению равновесия.
2. Если система находится в ε-окрестности положения равновесия по первой и третьей координате, но при этом вне нее – по второй и четвертой, то по второй и четвертой координате она будет приближаться к положению равновесия, тогда как по третьей и первой – отдаляться. И как только она выйдет из ε-трубки положения равновесия по первой или третьей координате, будет работать случай 1.
3. Если же по первой и третьей координате система не успеет выйти из ε-окрестности положения равновесия за то время, пока по второй и четвертой координате она туда войдет, то задача решена, так как выйти из ε-окрестности положения равновесия, находясь там по всем четырем координатам, система уже не может.

4. Заключение

Данная работа представляет собой первый этап в рассмотрении четырехмерной пищевой цепи, в которой управляющие параметры входят в показатели роста и смертности первого и третьего вида. Предложен метод синтеза управления для задачи попадания в произвольно малую ε-окрестность положения равновесия. Доказано, что такой синтез позволяет решить задачу за конечное время. Также исследовано поведение системы в скользящих режимах.

Дальнейшее рассмотрение задачи предполагает изучение возможности попадания в точности в положение равновесия за конечное время. Численные эксперименты позволяют предположить, что таковая возможность есть, но требует более тонкого анализа, который выходит за пределы представленной работы.

Список литературы

1. Lotka A.J. Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 1920. Vol. 6, P. 410-415.
2. Murray J.D. Mathematical Biology. Springer, 2002.
3. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука. 1985.
4. Sze-Bi Hsu, Shigui Ruan, Ting-Hui Yang, Analysis of three species Lotka-Volterra food web models with omnivory // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. V. 426. P. 659-687
5. Cairo L., Darboux First Integral Conditions and Integrability of the 3D Lotka-Volterra System // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2000. Vol. 7, No. 4. P. 511-531.
6. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические модели и модели биологии. М.: Физматлит, 2010.
7. Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P. Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka-Volterra food chains // Mathematical Biology. 2014. Vol. 69. P. 1609-1626.
8. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.