519.83 + 519.86

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ ГОСУДАРСТВЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

А.Ф. Рогачев
Волгоградский государственный аграрный университет
Россия, 400066, г. Волгоград, ул. Советская, 6-109
E-mail: rafr@mail.ru

Е.С. Брискин
Волгоградский государственный технический университет
Россия, 400005, г. Волгоград, пр. им. Ленина, 28
E-mail: ebriskin@mail.ru

Л.Е. Козлова
Волгоградский государственный технический университет
Россия, 400005, г. Волгоград, пр. им. Ленина, 28
E-mail: dtm@vstu.ru

Ключевые слова. Социально-экономическая система, математическое моделирование, дифференциальные уравнения, идентификация параметров, фазовый портрет, устойчивость.

Аннотация: Рассматривается экономико-математическое моделирование в области развития социально-экономических систем в условиях регулирования их экономического развития со стороны государства. Предложена экономико-математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений, характеризующих эволюцию макроэкономических показателей для закрытой социально-экономической системы с учетом управляющего воздействия со стороны государства на общественное производство с учетом расслоения населения по уровню доходов. Рассмотрены возможные фазовые траектории эволюции моделируемых социально-экономических систем в зависимости от параметров математической модели. На основе анализа статистических данных по РФ, характеризующих общественное благосостояние (ВВП) и расслоение общества по уровню доходов (коэффициент Джини), получены параметры дифференциальных уравнений и построены фазовые траектории, соответствующие характеру особой точки вида «седло». Сделаны выводы о возможности влияния на параметры социально-экономических систем с целью изменения характера эволюции моделируемых процессов.

1. Введение

Структура макроэкономики, как большой системы, может рассматриваться в качестве объекта математического моделирования на различных уровнях агрегирования [1].

Основными функциями экономической системы являются размещение ресурсов, производство, распределение продукции и осуществление накопления [2-4].

Являясь подсистемой общества в целом, экономика также представляет собой сложную систему, включающую производственные и непроизводственных (финансовые, логистические и др.) хозяйственные субъекты, находящиеся в производственно-технологических и/или организационно-хозяйственных связях [5]. Исследование социально-экономических систем с использованием аналитических моделей [6], по сравнению с другими подходами (когнитивное моделирование, построение регрессионных эконометрических моделей, нейросетевое моделирование) позволяет получать количественную оценку изучаемых процессов. Отдельный интерес представляет собой моделирование управляющих воздействий на социально-экономическую систему со стороны государства, обеспечивающее ее изменение в требуемом для общества направлении [7-9].

Известны различные аналитические модели макроэкономических моделей в форме дифференциальных, в т.ч. линейных, уравнений с производственными функциями различного вида, например, модели Солоу-Леонтьева, Неймана и др. [3, 10]. Особенность каждой из математических моделей состоит в системе допущений и учета значимости тех или иных факторов (переменных), а их адекватность проверяется соответствием полученных из них выводов реально протекающим экономическим процессам.

2. Постановка задачи

Рассматриваются замкнутые социально-экономические системы [3, 11], не взаимодействующие экономически, информационно, культурно и т.п. с другими социально-экономическими системами.

Вводятся следующие гипотезы:

2.1. Замкнутая социально-экономическая система характеризуется двумя основными показателями:

– объемом производства Q в единицу времени известных к анализируемому периоду времени и необходимых ему материальных и духовных благ приходящегося на одного члена социально-экономической системы (сообщества);

– расслоением сообщества, оцениваемом индексом Джини G в потреблении произведенных материальных и духовных благ.

Обоснованность введенной гипотезы основывается на понимании того, что все остальные показатели (рентабельность производства, прибыль, объем инвестиций, кредитная ставка и др.) служат для описания процессов, влияющих на рассматриваемые показатели Q и G. При этом стимулирующим источником развития производства для каждого члена сообщества является возможность перераспределения дополнительно произведенных материальных и духовных благ в свою пользу [1, 12].

2.2. Изменение во времени введенных показателей описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = F_1(Q,G) \\ \frac{dG}{dt} = F_2(Q,G), \end{cases} \tag{2.1}$$

где F_1, F_2 – некоторые непрерывные и дифференцируемые функции.

Если социально-экономическая система находится в стационарном состоянии или близком к нему, определяемом как практическую неизменность показателей Q и G за значимый для сообщества промежуток времени, то

(2.2) $$\begin{cases} F_1(Q, G) = 0 \\ F_2(Q, G) = 0, \end{cases}$$

Решением системы алгебраических уравнений (2.2) в общем случае являются пары чисел Q_{i0}, G_{i0} (i = 1, 2 … N), где N – число действительных корней уравнений (2.2). Областью изменения показателей являются $Q > 0$, $0< G <1$.

Эта гипотеза основана на известном факте изменения показателей социально-экономической системы Q, G во времени. Этот процесс в общем случае записывается с помощью операторных уравнений

(2.3) $$\begin{cases} L_1(Q, G, t) = 0 \\ L_2(Q, G, t) = 0, \end{cases}$$

где L_1, L_2 – некоторые операторы, устанавливающие связь между введенными показателями и временем.

Уравнения (2.1) являются частным и простейшим вариантов использования таких операторов. Степень адекватности описания действительных процессов в социально-экономической системе с помощью уравнений (2.1) может быть оценена по проверяемых на опыте следующих из них статистических результатов.

2.3. При эволюционном развитии социально-экономической системы последняя, в каждый момент времени, находится в квазистационарном состоянии и ее показатели близки к одному из стационарных решений Q_0, G_0 уравнений (2.2). Это стационарное состояние может быть как устойчивым, в том числе и асимптотически, так и неустойчивым по А.М. Ляпунову [7]. Асимптотическая устойчивость хотя и соответствует социально-экономической стабильности, но не обеспечивает развития системы.

Устойчивое (не асимптотически) состояние предполагает изменение показателей, но в определенных пределах. Возможен как их рост, так и падение на некоторую величину на определенных интервалах времени.

Неустойчивое состояние соответствует в среднем монотонному изменению показателей, что может быть оценено как положительно, так и отрицательно. С математической точки зрения это зависит от вводимого критерия оптимального развития, а с социальной вводимый критерий представляет собой классовую оценку.

Описанная постановки задачи моделирования замкнутой социально-экономической системы может быть распространена и на несколько взаимодействующих между собой социально-экономичеких систем. При этом увеличивается как количество дифференциальных уравнений, так и число фазовых переменных за счет их взаимовлияния друг на друга.

Ставится задача определения характера стационарного состояния замкнутой социально-экономической системы, тенденцию ее развития при малых отклонениях от стационарного состояния и выявления возможности целенаправленного управления такой тенденцией.

3. Метод решения

Метод решения поставленной задачи основан на применении теории устойчивости по первому приближению [7], для чего составляются уравнения в вариациях для невозмущенной системы дифференциальных уравнений (2.1) в окрестности стационарного состояния Q_0, G_0.

(3.1) $$\begin{cases} \frac{d\delta Q}{dt} = a_{11}\delta Q + a_{12}\delta G \\ \frac{d\delta G}{dt} = a_{21}\delta Q + a_{22}\delta G \end{cases}$$

где

(3.2) $$a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial Q}\Big|_{\substack{Q=Q_0\\G=G_0}} ;\ a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial G}\Big|_{\substack{Q=Q_0\\G=G_0}} ;\ a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial Q}\Big|_{\substack{Q=Q_0\\G=G_0}} ;\ a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial G}\Big|_{\substack{Q=Q_0\\G=G_0}}.$$

В общем случае a_{ij} (i, j = 1, 2) зависят от особенностей социально-экономической системы и могут принимать различные значения. Однако известно, что, как правило, $a_{11} < 0$, что соответствует экономическому закону убывающей отдачи [6] и объективной потребности не затрачивать усилия на производство избыточных материальных и духовных благ, характерного для соответствующего этапа развития общества, $a_{21} > 0$, что соответствует гипотезе об объективном стремлении каждого члена сообщества располагать большей возможностью перераспределения материальных и духовных благ в свою пользу с их ростом. Коэффициенты a_{12}, a_{22} характеризуют субъективное влияние сообщества, обычно в лице государственного аппарата, на производство и распределение материальных и духовных благ. Величину a_{12} (если $a_{12} > 0$) можно интерпретировать как уровень преференций со стороны государства для производства, а a_{22} (если $a_{22} < 0$) – как уровень выравнивания доходов членов сообщества, например, в форме установления нормирования зарплаты, прогрессивного налогообложения для наиболее обеспеченных его членов и выдачи субсидий для наиболее нуждающихся и т.п.

Как обычно [7] решение системы дифференциальных уравнений (3.1) разыскивается в форме

(3.3) $$\delta Q = U_0\, e^{\lambda t},\qquad \delta G = V_0 e^{\lambda t},$$

где U_0, V_0 – постоянные, определяемые из начальных условий, λ – характеристический показатель.

Характер стационарной точки Q_0, G_0 зависит от значения характеристического показателя λ, определяемого из характеристического уравнения

(3.4) $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Для оговоренных знаков коэффициентов a_{11}, a_{22} корни уравнения (3.4) зависят от значения свободного члена $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$. Здесь возможны четыре различных случая, определяемые величиной параметра α [7]

(3.5) $$\alpha = \frac{(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{22})4}{(a_{11}+a_{22})^2}$$

1. Если $\alpha < 0$, то корни уравнения (3.4) действительные, различных знаков; особая точка – седло.

2. Если один из корней уравнения (3.4) $\alpha = 0$, то для определения характера особой точки применение теории устойчивости по первому приближению недостаточно.

3. Если $0 < \alpha < 1$ – корни уравнения действительные и отрицательные; особая точка – устойчивый узел.

4. Если $\alpha > 1$ – корни уравнения комплексные и имеют отрицательную действительную часть; особая точка – устойчивый фокус.

4. Анализ результатов и методы корректировки социально-экономических процессов

Особой наглядностью обладают фазовые траектории социально-экономических процессов, устанавливающие связь между малыми отклонениями от стационарного состояния показателей δQ, δG

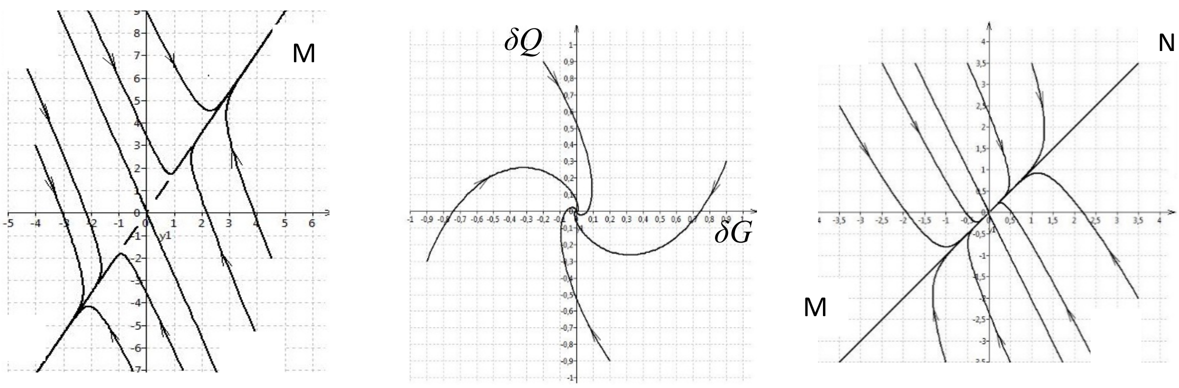
(4.1) $$\Phi\,(\delta Q, \delta G) = 0.$$

Для построения фазовых траекторий первое уравнение (3.1) делится на второе

(4.2) $$\frac{d\delta Q}{d\delta G} = \frac{a_{11}\delta Q + a_{12}\delta G}{a_{21}\delta Q + a_{22}\delta G}.$$

Уравнение (4.2) легко решается численными методами, однако качественный вид решения, удобный для анализа, можно получить методом изогональных траекторий [7]. Здесь возможны различные случаи, для которых на рис. 1 для некоторых условных социально-экономических систем представлены соответствующие фазовые портреты. На рис. 1(а) особая точка соответствует седлу (a_{11} = –10, a_{12} = 20, a_{21} = 4, a_{22} = -6), на рисунке 1(б) – устойчивому фокусу (a_{12} = –8), а на рисунке 1(в) – устойчивому узлу (a_{12} = 8). Как в первом, так и в третьем случае имеются асимптоты *KL*, *MN*, при приближении к которым показатели монотонно изменяются. Однако, следует иметь ввиду, что уравнение (3.1), на основе которых построены фазовые траектории, получены в результате линеаризации уравнения (2.1) и выводы справедливы только для малых δQ и δG. Направление движения изображающей точки *A* по фазовым траекториям определяется знаком правых частей уравнений (3.1), а скорость – величинами корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (3.4).

Анализ представленных на графиках процессов показывает, что во втором и третьем случае социально-экономическая система устойчива и не развивается. Причем, если в третьем случае (рис. 1в) в силу некоторых причин при малом изменении объема δQ и индекса Джини δG от стационарных значений эти отклонения апериодически убывают, то во втором случае (рис. 1б) процесс носит колебательный затухающий характер. Экономически это объясняется отсутствием мотивации увеличения производства у производителя, особенно в третьем случае, для которого a_{12} = 8. С увеличением материального расслоения в обществе, характеризуемом индексом Джини, скорость изменения объема δQ убывает.



а) б) в)

Рис. 1. Типичные фазовые портреты исследуемых СЭС а) Седло; б) Устойчивый фокус; в) Устойчивый узел.

Такое явление может иметь место, если, например, непропорционально увеличивать отчисления в виде налогов на объем производимой продукции или другими способами отрицательно влиять на ее выпуск, например, непрерывно увеличивать план выпуска продукции при достижении более высоких показателей (в директивной экономике).

а) б)

Рис. 2. Фазовые портреты СЭС предельных случаев управления) $a_{12} = a_{22} = 0$; б) $a_{22} >> a_{21}$; $a_{12} >> a_{11}$.

Первый случай (рис. 1а) отличается от обсужденных тем, что со стороны общества имеет место стимулирование выпуска продукции ($a_{22} = 20$), например, с ростом выпуска продукции уменьшается процент отчисления в виде налогов или увеличивается объем дотаций и объем софинансирования тех или иных проектов.

Это приводит с течением времени к асимптотическому возрастанию одного из показателей и уменьшению другого. Наиболее приемлемый процесс состоит в увеличении производства и уменьшении расслоения членов общества. Для этого необходимо так формировать экономическую политику, чтобы коэффициенты a_{12}, a_{22}, определяемые стратегией управления. обеспечивали $\lambda < 0$ (3.5), а начальные возмущения δQ_0, δG_0 лежали левее асимптоты MN

(4.3) $$\delta Q_0 > \frac{a_{22} - a_{12} + \sqrt{(a_{22} - a_{12})^2} + 4a_{12}a_{21}}{a_{21}} \delta G_0.$$

Одна из возможностей обеспечения выполнения (4.3) директивное изменение δG_0, например, за счет разовой экспроприации собственности. Однако следует иметь ввиду, что в начальный момент процесс изменения δQ и δG может проходить и с одновременным увеличением или уменьшением показателей.

Интересен анализ и социально-экономических систем определяемых как систем, в которых полностью отсутствует управление

(4.4) $$a_{12} = a_{22} = 0$$

и с абсолютным управлением

(4.5) $$a_{22} >> a_{21};\ a_{12} >> a_{11}.$$

На графиках (рис. 2) представлены соответствующие фазовые портреты. В первом случае расслоение населения по доходам непрерывно увеличивается, а производство падает (в предельном случае до нуля, в рамках предложенной математической модели). Во втором случае производство растет до предельной величины, определяемой минимумом расслоения $G = 0$.

По мнению авторов, эти тенденции качественно подтверждаются такими известными реальными экономическими явлениями как «шоковая терапия» [2] (рис. 2а) и тотальное плановое регулирование экономики (рис. 2б).

Обсуждаемая математическая модель социально-экономического развития общества позволяет и целенаправленно управлять таким развитием.

5. Идентификация параметров социально-экономической системы

Для идентификации параметров социально-экономической системы a_{ij} (i, j = 1, 2) используются уравнения (3.1) в предположении их постоянства (a_{ij} = const). Для этого на основе анализа статистических данных для двух относительно близких моментов времени определяются $\delta\dot{Q}$, δQ, $\delta\dot{G}$, δG. Например, необходимые данные для расчета по России сведены в таблице 1; Q_0 и G_0 принимаются на уровне 2000 года Q_0=1775,13 млн. $, G_0=0,395.

Таблица 1. К расчету параметров $a_{i,j}$ модели (3.1).

Показатели	Годы	
	2004	2017
δQ млн. $	2336	7326
δG	0,02	0,027
$\delta\dot{Q}$ млн. $/год	1130	2169
$\delta\dot{G}$ 1/год	0,006	0,007

Тогда решая систему линейных алгебраических уравнений, определяются параметры a_{ij}: a_{11} = 0,008; a_{12} = 0,080; a_{21} = 3,14; a_{22} = – 0,953.

Особой точкой для такой системы является седло, а фазовый портрет представлен на рис. 3. Положительность коэффициента a_{11} может свидетельствовать о том, что производительность труда Q в России в оцениваемом периоде не достигла точки, когда ее увеличение приведет к уменьшению скорости ее роста.

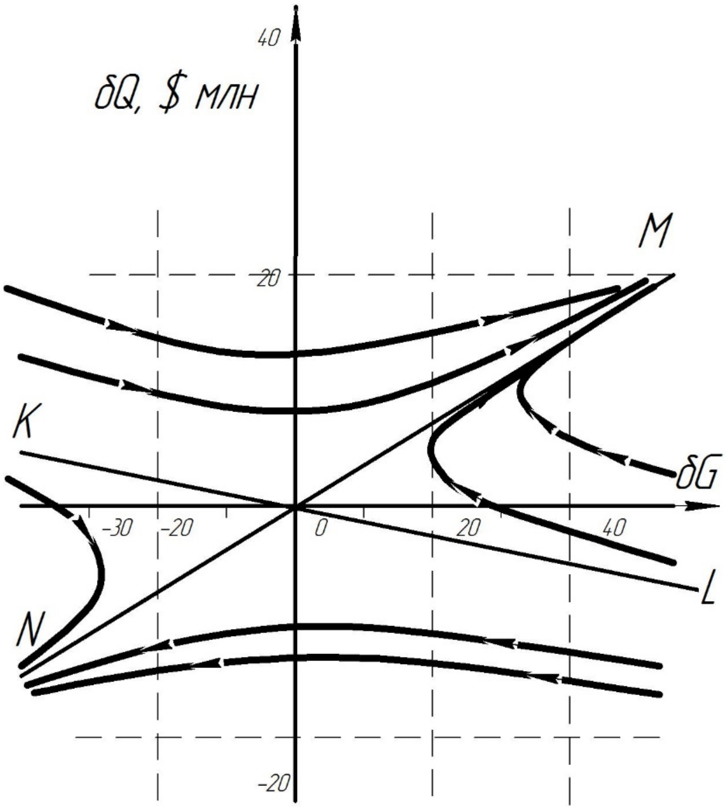


Рис. 3. Фазовый портрет характера эволюции экономики РФ как динамической системы.

По-видимому, это связано с не учитываемом в математической модели взаимодействии с другими социально-экономическими системами, которое, главным образом, реализуется за счет поставок на внешний рынок природных ресурсов. В исследуемом периоде времени непрерывно росли цены на энергоносители.

6. Выводы

1. Построенная экономико-математическая модель социально-экономической системы, позволяет целенаправленно управлять стимулирующей и фискальной финансовой политикой в обществе. С использованием предложенной математической модели получены качественные результаты эволюции макроэкономических показателей при различных сочетаниях параметров моделируемой экономической системы.
2. Значения параметров модели (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) характеризуют текущее состояние моделируемой системы и тенденции ее эволюции. Меняя значения экзогенных параметров a_{12} и a_{22} возможно обеспечить качественное изменение фазовых портретов, необходимое для достижения желаемых результатов в развитии моделируемой социально-экономической системы. Коэффициенты a_{12}, a_{22} в совокупности характеризуют то, насколько государственная политика экономического развития общества является социально ориентированной. Чем больше a_{12}, тем сильнее государство поддерживает и защищает производителя. Чем меньше a_{22}, тем существеннее сокращается уровень неравенства и расслоения в обществе.
3. Предложенная математическая модель ограничена в силу неучета взаимодействия рассматриваемой социально-экономической системы с другими. Для такого учета

уравнения (3.1) должны быть расширены за счет введения новых переменных δQ_n, δG_n (n = 1, 2…N; N – количество взаимодействующих систем) характеризующих взаимодействие рассматриваемой социально-экономической системы с другими.

Список литературы

1. Rogachev A. Economic and mathematical modeling of food security level in view of import substitution // Asian Social Science. 2015. Vol. 11, No. 20. P. 178-184.
2. Абалкин Л.И. Логика экономического роста. М.: Институт экономики РАН, 2002. 228 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика / 3-е стереотип. изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 399 с.
4. Макконнелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс: принципы, проблемы и политика / Пер. с 14-го англ. изд. М.: ИНФРА-М, 2003. XXXVI, 972 с.
5. Устюжанина Е.В. Системное моделирование производства, распределения и потребления // Экономика и математические методы. 1987. Т. 23, Вып. 1. С. 180-181.
6. Афанасьев М.В. и др. Инновационное развитие национальной экономики в контексте современной теории управления социально-экономическими системами // Экономика и предпринимательство. 2014. № 12 (ч.4) (53-4). С. 139-142.
7. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1966. 568 с.
8. Нижегородцев Р.М. Парадигма неравновесия и задачи государственного управления в Российской Федерации в условиях импортозамещения институтов // Государственное управление. Электронный вестник. 2016. № 58. С. 39-53.
9. Скитер Н.Н., Рогачев А.Ф. Моделирование и анализ эффективности государственного регулирования производственного сектора // Экономические науки. 2010. № 62. С. 28-33.
10. Брискин Е.С., Рогачев А.Ф., Козлова Л.Е. Математическое моделирование управления развитием социально-экономических систем // Аудит и финансовый анализ. 2017. № 3-4. С. 117-120.
11. Вороновицкий М.М. Динамическая модель замкнутого однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве участников // Экономика и математические методы. 2016. Т. 52, № 2. С. 75-90.
12. Skiter N.N. Rogachev A.F., Mazaeva T.I. Modeling Ecological Security of a State // Mediterranean Journal of Social Science. 2015. Vol. 6, No. 3. S6.