

УДК 519.5+517.91+504.06

# ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ МОНИТОРИНГА КАЧЕСТВА ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ

**О.Б. Бутусов**

*Московский политехнический университет*  
Россия, 107023, г. Москва, ул. Б. Семёновская, д. 38  
E-mail: [butusov-1@mail.ru](mailto:butusov-1@mail.ru)

**Н.И. Редикульцева**

*Московский гуманитарный университет*  
Россия, 111395, г. Москва, ул. Юности, д. 5  
E-mail: [redik\\_ni@mail.ru](mailto:redik_ni@mail.ru)

**О.П. Никифорова**

*Государственный университет управления*  
Россия, 109542, г. Москва, Рязанский проспект, д. 99  
E-mail: [olga.nikiforova2013@yandex.ru](mailto:olga.nikiforova2013@yandex.ru)

**Ключевые слова:** нечеткая производная, нечеткие дифференциальные уравнения, модифицированное уравнение Ферхюльста, виртуальный отрицательный поток биомассы, интервальная арифметика, качество природной среды, деградация природной среды, экологический мониторинг.

**Аннотация:** На основе логистической модели Ферхюльста разработана нечеткая дифференциальная модель динамики лесной биомассы. В отличие от классической модели Ферхюльста при разработке нечеткой модели использовано понятие виртуального отрицательного потока биомассы, который описывает процессы деградации лесов под воздействием газовых выбросов промышленных предприятий. Нечеткие переменные и параметры модели описаны с помощью треугольных нечетких чисел. Для преобразования нечеткой арифметики в интервальную использован механизм  $\alpha$ -сечений функций принадлежности. Рассмотрены два варианта модели: модель с правой нечеткой производной (ПНП) и модель с левой нечеткой производной (ЛНП). В результате численных экспериментов установлено, что модель ПНП не имеет асимптот и границы интервалов расходятся, в результате чего ширина интервалов нечеткости катастрофически возрастает. Модель ЛНП имеет асимптоты. Ширина интервала нечеткости достаточно быстро приближается к стационарному пределу, после которого сохраняет постоянную величину.

## 1. Введение

В разработанной модели в качестве интегрального показателя антропогенного воздействия на природную среду и, в частности, на леса использована величину лесной биомассы, которая уменьшается под воздействием антропогенных факторов [1]. В работе [2] предложена следующая эмпирическая формула для оценки антропогенных изменений лесной биомассы

$$(1) \quad \frac{dB}{dt} = GBM \left( 1 - \frac{B}{M} \right) - E,$$

где  $B$  – плотность лесной биомассы ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-2}$ ),  $t$  – время ( $\text{месяц}^{-1}$ ),  $G$  – коэффициент прироста биомассы ( $\text{кг}^{-1}\cdot\text{м}^2\cdot\text{месяц}^{-1}$ ),  $M$  – плотность биомассы при нулевом потоке ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-2}$ ),  $E$  – отрицательный поток биомассы ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{месяц}^{-1}$ ).

В работе [2] отрицательный поток биомассы – это количество биомассы, изымаемое из лесного массива в единицу времени на нужды отопления. В данной работе предложено использовать поток биомассы, который имеет виртуальный характер. Так уменьшение биомассы под воздействием выбросов промышленных предприятий можно рассматривать как отрицательный поток. Увеличение биомассы также может быть описано с помощью виртуальных положительных потоков, например, увеличение биомассы, связанное с восстановлением и реабилитацией лесов, происходящее вследствие очистки газовых выбросов промышленных предприятий.

Авторы [2] в качестве единицы измерения времени использовали один месяц, что вполне оправдано для южных широт. В северных широтах для измерения времени лучше использовать другую единицу, например, в наших расчетах использован вегетационный период (ВП). Это обусловлено тем, что реальное уменьшение биомассы за счет газовых выбросов промышленных предприятий может происходить только в течение вегетационного периода.

Модель (1) является трех параметрической моделью и относится к классу моделей Ферхюльста [3]. В безразмерной форме модель имеет следующий вид:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{db}{d\tau} = b(1-b) - e, \\ b(0) = b_0 \end{cases}$$

где  $b = \frac{B}{M}$  – безразмерная плотность биомассы,  $M$  – предельная плотность биомассы при нулевом потоке ( $\text{кг м}^{-2}$ ),  $g = GM$  – удельный коэффициент прироста биомассы ( $\text{ВП}^{-1}$ ),  $\tau = gt$  – безразмерное время,  $T$  – время релаксации динамической системы (ВП),

$T_g = gT$  – безразмерное время релаксации динамической системы,  $\tau_n = \frac{\tau}{T_g} = \frac{t}{T}$  – без-

размерное нормализованное время,  $e = \frac{E}{Mg}$  – безразмерный отрицательный поток био-

массы,  $b_0$  – начальная безразмерная плотность биомассы.

Для постоянных потоков биомассы модель (2) имеет аналитическое решение:

$$(3) \quad b(\tau) = \begin{cases} \frac{a_1 - Pa_2}{1 - P}, & e \leq 0.25, \\ \frac{b_0 + ke - kb_0 / 2}{1 - k(b_0 - 0.5)}, & e > 0.25, \\ \frac{b_0 + 0.5\tau(b_0 - 0.5)}{1 + \tau(b_0 - 0.5)}, & e = 0.25 \end{cases}$$

где  $a_1 = 0.5 + \sqrt{0.25 - e}$ ,  $a_2 = 0.5 - \sqrt{0.25 - e}$ ,  $P = \frac{b_0 - a_1}{b_0 - a_2} \exp(-(a_1 - a_2)\tau)$ ,  $k = -\frac{1}{r} \text{tg}(r\tau)$ ,

$r = \sqrt{e - 0.25}$ .

Следует учитывать, что при  $e > 0.25$ , т.е. при больших отрицательных потоках биомасса достаточно быстро уменьшается до нуля и далее становится отрицательной. Поэтому для получения решений, имеющих физический смысл, следует использовать только варианты  $e < 0.25$ , т.е. рассматривать случаи небольших отрицательных потоков или положительных потоков.

## 2. Методика

Рассмотрим модель (2) в приближении нечетких чисел. Обозначим безразмерное время  $\tau \rightarrow t$ . Тогда нечеткий вариант модели (2) с отрицательным потоком биомассы примет следующий вид

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{b}}{dt} = \tilde{b}(1-\tilde{b}) - \tilde{e}, \\ b(0) = \tilde{b}_0 \end{cases}$$

где знак  $\sim$  – «тильда» используется для обозначения НЧ.

Для численного моделирования будем рассматривать приближение положительных треугольных нечетких чисел (ТНЧ) и метод  $\alpha$ -сечений функций принадлежности ФП [4]. При этом  $\alpha$ -сечение представляет собой четкий интервал, в котором находятся точки  $x$ , для которых  $f_b(x) > \alpha$ , где  $f_b(x)$  – функция принадлежности. Таким образом, от нечетких чисел можно перейти к четким интервалам и решать интервальные уравнения вместо нечетких [4].  $\alpha$ -интервал для функции  $b(t)$  можно представить в следующем виде:  $[b(t)]_\alpha = [\underline{b}_\alpha(t), \bar{b}_\alpha(t)]$ . Введем следующие обозначения:  $\underline{b}_\alpha(t) \rightarrow d(t)$ ,  $\bar{b}_\alpha(t) \rightarrow u(t)$  («d - down» and «u - up»). В этих обозначениях  $[b(t)]_\alpha \rightarrow [b(t)] = [d(t), u(t)]$ , где  $[b(t)]$  интервальная функция. Согласно [5,6] правая и левая производные от интервальной функции не равны друг другу, что приводит к двум различным интервальным дифференциальным уравнениям Ферхюльста:

$$(5) \quad [d'(t), u'(t)] = [f(d, u, eu), f(u, d, ed)],$$

$$(6) \quad [d'(t), u'(t)] = [f(u, d, ed), f(d, u, eu)],$$

где  $f(x, y, z) = x - y^2 - z$ ,  $eu = \bar{e}$ ,  $ed = \underline{e}$ .

Интервальное уравнение (5) эквивалентно системе следующих двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДЕ):

$$(7) \quad \begin{cases} d'(t) = f(d, u, eu), \\ u'(t) = f(u, d, ed) \end{cases}$$

Интервальное уравнение (6) эквивалентно следующей системе ОДЕ:

$$(8) \quad \begin{cases} d'(t) = f(u, d, ed), \\ u'(t) = f(d, u, eu) \end{cases}$$

Для численного решения систем ОДЕ (7) и (8) был использован метод конечных разностей и численная схема Рунге-Кутты второго порядка. Численная схема для решения системы ОДЕ (7) имеет следующий вид

$$(9) \quad d_{i+1} = d_i + \frac{dt}{2} (f(d_i, u_i, eu) + f(D_i, U_i, eu)),$$

$$(10) \quad u_{i+1} = u_i + \frac{dt}{2} (f(u_i, d_i, ed) + f(U_i, D_i, ed)),$$

где  $D_i = d_i + dt \cdot f(d_i, u_i, eu)$ ,  $U_i = u_i + dt \cdot f(u_i, d_i, ed)$

Для системы ОДЕ (8) численная схема имеет вид

$$(11) \quad d_{i+1} = d_i + \frac{dt}{2} (f(u_i, d_i, ed) + f(U_i, D_i, ed)),$$

$$(12) \quad u_{i+1} = u_i + \frac{dt}{2} (f(d_i, u_i, eu) + f(D_i, U_i, eu)),$$

где  $D_i = d_i + dt \cdot f(u_i, d_i, ed)$ ,  $U_i = u_i + dt \cdot f(d_i, u_i, eu)$ .

Область допустимых решений конечно-разностных уравнений (9) – (12) определяется условиями:  $d_i, u_i \geq 0$ ;  $D_i, U_i \geq 0$ .

### 3. Результаты

В разработанной нечеткой дифференциальной модели антропогенная нагрузка учитывается с помощью нечетких виртуальных отрицательных потоков биомассы. Результаты численных экспериментов представлены на рис. 1.

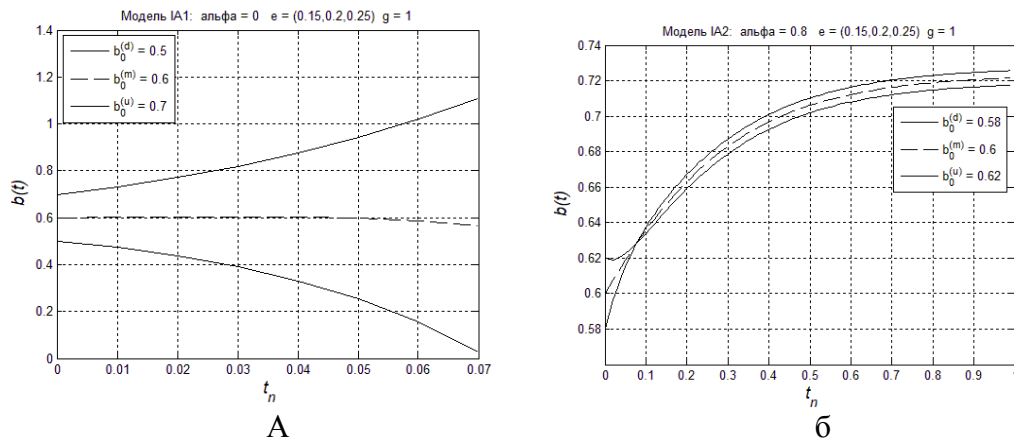


Рис.1. Динамика границ интервалов нечеткости: а – модель «IA1»; б – модель «IA2».

Обозначим нечеткую интервальную модель (9), (10) «IA1» (Interval Arithmetic-1) и модель (11), (12) «IA2» (Interval Arithmetic-2). Объемы лесной биомассы могут регулироваться в модели с помощью двух управляющих параметров: коэффициента прироста биомассы и величиной отрицательных виртуальных потоков биомассы. Как отмечено выше, величина этих параметров неизвестна и поэтому эти параметры были описаны с помощью нечетких чисел. Результаты моделирования с помощью нечеткой модели IA1 показаны на рис.1а. Как следует из рис.1а, границы интервала нечеткости не имеют асимптот и расходятся в разные стороны, в результате чего ширина интервала неопределенности катастрофически возрастает. Результаты моделирования с помощью нечеткой модели IA2 показаны на рис.1б. Очевидно, что границы интервала асимптотически приближаются к своим пределам. Ширина интервала стабилизируется и постепенно приближается к постоянному значению, а сама плотность биомассы приближается к стационарному пределу, который и определяет предельное значение плотности биомассы. При этом следует отметить, что воздействие атмосферных промышленных загрязнений на качество лесных экосистем проявляется различным образом в зависимости от

величины концентрации промышленных загрязнений в атмосферном воздухе. В книге Вильяма Смита [7] взаимодействие атмосферных загрязнений и лесных экосистем разделяется на три класса: слабое взаимодействие при малых концентрациях промышленных поллютантов, при котором лесные массивы выступают в роли эффективного очистителя атмосферы от поллютантов; средний уровень воздействия загрязнений на леса, при котором происходят физиологические нарушения имеющие физиономический характер и уменьшение таких важных показателей экологического состояния лесов как биомасса, проективное покрытие, видовое разнообразие и пр., при этом в результате ослабления защитных функций возможны заболевания отдельных групп деревьев и инвазия насекомых вредителей; высокий уровень характеризуется заболеванием и смертностью деревьев, в результате чего происходит изреживание древостоя, обезлесивание территорий и значительное уменьшение плотности биомассы.

## 4. Заключение

Введено понятие виртуальных отрицательных потоков биомассы, с помощью которых предложено описывать воздействие газовых выбросов промышленных предприятий на природные экосистемы.

Для моделирования динамических процессов в природной среде предложено использовать нечеткую модификацию дифференциальной модели Ферхюльста с учетом виртуальных отрицательных потоков биомассы.

В численных экспериментах использованы два варианта разработанной модели: модель с правой нечеткой производной (ПНП) и модель с левой нечеткой производной (ЛНП).

Установлено, что модель ПНП не имеет асимптот и границы интервалов расходятся, в результате чего ширина интервалов неопределенности катастрофически возрастает. Модель ЛНП имеет асимптоты, ширина интервала достаточно быстро приближается к стационарному пределу, после которого сохраняет постоянную ширину.

## Список литературы

1. Бутусов О.Б., Степанов А.М. Новая модель доза-эффект динамики лесных экосистем в районе металлургических предприятий // Экология и промышленность России. 2001. № 6. С. 37-40.
2. Franco Salerno, Gaetano Viviano, Sudeep Thakuri et. al. Energy, Forest, and Indoor Air Pollution Models for Sagarmatha National Park and Buffer Zone, Nepal // Mountain Research and Development (MRD) (An international, peer-reviewed open access journal published by the International Mountain Society (IMS) [www.mrd-journal.org](http://www.mrd-journal.org)). 2010. Vol. 30, No. 2. P. 113-126. (<http://dx.doi.org/10.1659/MRD-JOURNAL-D-10-00027.1>)
3. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997. 255 с.
4. Lee Kwang H. First Course on Fuzzy Theory and Applications. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2005. 341 p.
5. Lakshmikantham V., Mohapatra R.N. Theory of fuzzy differential equations and inclusions. London, New York: Taylor & Francis Group, 2003. 182 p.
6. Kanagarajan K., Suresh R. Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability by Modified Euler method // International Journal of Mathematical Engineering and Science. 2013. Vol. 2, No. 11. P. 5-15.
7. Smith W.H. Air Pollution and Forests. Interactions between Air Contaminants and Forest Ecosystems. New York: Springer, 1981. 388 p.