

УДК 681.51:621.3.002.5:621.039.6:533.95

# СИНТЕЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

**Е.А. Павлова**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН;  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65;  
Россия, 11991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
E-mail: [pavlova@physics.msu.ru](mailto:pavlova@physics.msu.ru)

**Ю.В. Митришкин**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 11991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2;  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65  
E-mail: [yvm@mail.com](mailto:yvm@mail.com)

**М.В. Хлебников**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65  
E-mail: [khlebnik@ipu.ru](mailto:khlebnik@ipu.ru)

**Ключевые слова:** линейные матричные неравенства, токамак, плазма,  $H_2/H_\infty$ -оптимизация, робастное управление.

**Аннотация:** Работа посвящена разработке робастных  $H_2$ - и  $H_\infty$ -систем управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в токамаке с помощью техники линейных матричных неравенств. Проведено сравнение полученных замкнутых робастных систем управления по критерию качества переходных процессов.

## 1. Введение

Разработка и исследование системы стабилизации неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаках при воздействии возмущений типа «малый срыв» является первостепенной задачей, решаемой при синтезе систем магнитного управления плазмой в токамаках. Для решения задачи робастного управления предложено применять метод линейных матричных неравенств (ЛМН) [1], [2].

При разработке системы управления неустойчивым вертикальным положением плазмы использовалась линейная модель, полученная линеаризацией плазмо-

физического кода ДИНА (ГНЦ РФ ТРИНИТИ, г. Троицк), настроенного на плазму в токамаке Т-15 (НИЦ "Курчатовский институт г. Москва) на квазистационарной фазе плазменного разряда. При этом исполнительное устройство — многофазный тиристорый выпрямитель, аппроксимировалось инерционным звеном первого порядка [3]. Структурная схема системы с обратной связью по состоянию представлена на рис. 1.

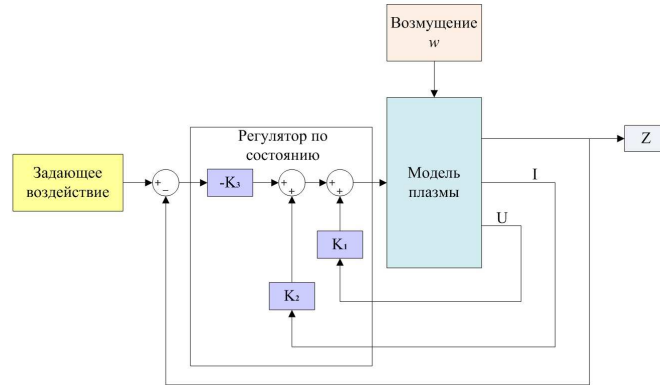


Рис. 1. Блок-схема замкнутой системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке Т-15.

## 2. Постановка задачи

Линейная модель объекта управления (плазмы в токамаке совместно с исполнительным устройством) в пространстве состояний имеет вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где  $x = (U \ I \ Z)^T$  — доступное для измерения состояние объекта управления ( $U(t)$  — напряжение,  $I(t)$  — ток в катушке управления,  $Z(t)$  — смещение плазмы в вертикальном направлении,  $P(t) = U(t)I(t)$  — мощность управления),  $u(t)$  — управление,  $y(t)$  — выход объекта управления,  $w(t)$  — аддитивное возмущение, моделирующее малый срыв; матрицы модели имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1/T_a & 0 & 0 \\ K_c/T_c & -1/T_c & 0 \\ 0 & K_p/T_p & 1/T_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} K_a/T_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_p/T_p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $T_a = 3,3$  мс,  $T_p = 20,8$  мс,  $T_c = 46,7$  мс — постоянные времени модели исполнительного устройства, модели плазмы и модели катушки горизонтального поля соответственно,  $K_a = 2000$ ,  $K_p = 1,78$  см/кА,  $K_c = 11,11$  1/Ом — коэффициенты усиления. Неустойчивый полюс модели плазмы равен  $1/T_p$ .

Пара матриц  $(A, B)$  управляема:  $\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = 3$ , пара матриц  $(A, C)$  наблюдаема:  $\text{rank} \begin{pmatrix} C^T & (CA)^T & (CA^2)^T \end{pmatrix} = 3$ .

Робастный закон управления для различных постановок задачи ЛМН выбирается из класса линейных статических обратных связей по состоянию вида  $u = Kx$ , где  $K = (K_1 \ K_2 \ K_3)$  — матрица регулятора.

### 3. Подходы к синтезу робастного регулятора

В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных синтезу робастных систем управления и анализу робастной устойчивости, которые основаны на применении теоремы Харитоновой,  $\mu$ -анализа, годографа Цыпкина-Поляка,  $H_\infty$ -теории оптимизации и др. В данной работе применены методы, использующие ЛМН, которые позволяют формулировать и решать многие задачи теории управления: стабилизация неустойчивого объекта по состоянию, оптимальное линейно-квадратичное управление,  $H_2/H_\infty$ -управление, управление по выходу, робастное управление и др., а также решать смешанные задачи.

### 4. Синтез робастного $H_2$ -регулятора

Данный раздел посвящен синтезу робастного  $H_2$ -регулятора по состоянию с размещением полюсов замкнутой системы в области

$$D_{\alpha, r, \theta} = \{(x, y): x < -\alpha < 0, |x + iy| < r, |y| < -x \tan \theta\},$$

обеспечивающего устойчивость вертикального положения плазмы токамака при возможном отклонении параметров плазмы от номинальных значений на 20 % и при воздействии на неё возмущения  $w$ . При этом искомый регулятор  $K$  должен обеспечивать низкий уровень влияния возмущения на выход замкнутой системы управления, а также робастную устойчивость системы.

Влияние возмущения  $w$  на выход системы  $Z$  представляется взаимосвязью

$$z(s) = \underbrace{C(sI - (A + BK)^{-1})D}_{G(s)} w(s).$$

Регулятор  $K$  должен гарантировать выполнение условия  $\|G(s)\|_2 < \gamma$ . Учитывая условие неопределенности параметров плазмы, представим матрицы  $A$  и  $D$  системы в виде:  $A = A_0 + \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2$ ,  $D = D_0 + \delta_1 D_1$ , где  $A_0$  и  $D_0$  — номинальные значения матриц. Система ЛМН для данной задачи синтеза робастного регулятора имеет вид:

$$AP + PA^T + BW + W^T B^T + 2\alpha P \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} -rP & AP + BW \\ PA^T + W^T B^T & -rP \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BW + W^T B^T & AP - PA^T + BW - W^T B^T \\ -AP + PA^T - BW + W^T B^T & AP + PA^T + BW + W^T B^T \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$AP + PA^T + BW + W^T B^T + DD^T \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} -Z & CP \\ PC^T & -P \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \text{tr } Z < \gamma^2,$$

где знак  $\circ$  обозначает произведение Адамара (поэлементное умножение матриц одинаковой размерности). Для нахождения скалярного коэффициента  $\gamma$  решается оптимизационная задача  $\min_{P,Z,W} \rho$ , где  $\rho = \gamma^2$ , а матрица регулятора обратной связи имеет вид  $K = WP^{-1}$ , где  $W$  и  $P$  — решения системы ЛМН. Решая систему в экстремальных точках полиэдра параметров, получим матрицу-строку

$$K = (-0,001 \quad -0,0051 \quad -1557,3)$$

коэффициентов обратной связи.

## 5. Синтез робастного $H_\infty$ -регулятора

Рассмотрим трехмерную систему (1) с матрицей  $C = (0 \ 0 \ 1)$ , подверженную воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений  $|w| \leq w_{\max}$ . Задача состоит в построении статической линейной обратной связи по состоянию  $u = Kx$ , когда дополнительно предполагается, что управление должно быть ограничено по абсолютной величине:  $|u| \leq u_{\max}$ , скалярный выход системы находится в заданной полосе:  $|Z| \leq Z_{\max}$ , а параметры  $K_p$  и  $T_p$  могут отклоняться от своих номинальных значений на 20%.

Воспользуемся  $H_\infty$ -подходом и будем решать задачу  $H_\infty$ -оптимизации в робастной постановке. Подход к ее решению, основанный на технике линейных матричных неравенств, был предложен в [1]; при этом исходная задача сводится к решению следующей задачи выпуклой оптимизации.

Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$  доставляют решение задаче  $\min \gamma$  при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_0 P + PA_0^T + BY + & w_{\max} D & PC^T & PH_1^T & PH_2^T \\ +Y^T B^T + \varepsilon_1 F_1 F_1^T + \varepsilon_2 F_2 F_2^T & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ w_{\max} D^T & 0 & -1 & 0 & 0 \\ CP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 & 0 \\ H_1 P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \\ H_2 P & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & u_{\max}^2 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad CPC^T \leq Z_{\max}^2,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^3$ , векторной переменной  $Y \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  и скалярным переменным  $\gamma$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Тогда искомым регулятором по состоянию дается выражением

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}.$$

Здесь неопределенность в параметрах  $K_p$  и  $T_p$  представлена в стандартном структурированном виде  $A(\delta) = A_0 + F_1 \delta_1 H_1 + F_2 \delta_2 H_2$ , где  $A_0$  — номинальное значение матрицы  $A$ . Для параметров

$$Z_{\max} = 0,02, \quad u_{\max} = 1, \quad w_{\max} = 1,5461 \cdot 10^3,$$

решение соответствующей задачи дает регулятор

$$\hat{K} = (-0,0005 \quad -0,0009 \quad -130,0341).$$

## 6. Сравнение $H_2$ - и $H_\infty$ -систем управления

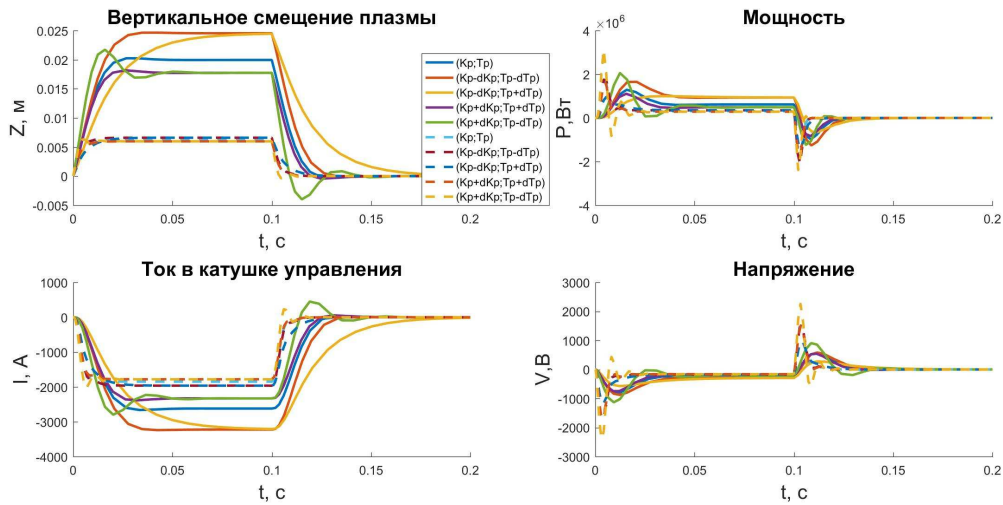


Рис. 2. Переходные процессы при стабилизации неустойчивого вертикального положения плазмы.

На рис. 2 представлены переходные процессы в системе при стабилизации неустойчивого вертикального положения плазмы с  $H_2$ -регулятором и  $H_\infty$ -регулятором, когда на систему действует возмущение  $w$  в виде прямоугольного импульса. Система с  $H_2$ -регулятором позволяет получить в  $\sim 4$ – $5$  раз меньшее отклонение вертикального положения плазмы  $Z$ , чем система с  $H_\infty$ -регулятором. Однако, при этом требуется в 1,4 раза большая мощность управления.

## 7. Заключение

В рассматриваемой задаче система с  $H_2$ -регулятором позволяет получить несколько лучшее качество переходных процессов, чем система с  $H_\infty$ -регулятором. Возможно это связано с тем, что для синтеза  $H_2$ -регулятора при решении оптимизационной задачи использовались все доступные состояния, а при синтезе  $H_\infty$ -регулятора только компонента  $Z$ . Однако синтез робастного регулятора по переменной  $Z$  создает теоретические предпосылки для разработки робастного регулятора по выходу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 17-08-00293 и РНФ, проект 17-19-01022.

## Список литературы

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.
2. Pavlova E.A., Mitrishkin Y.V., Khlebnikov M.V. Control System Design for Plasma Unstable Vertical Position in a Tokamak by Linear Matrix Inequalities // Proc. 11th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT 2017). Moscow, Russia, September 20-22, 2017. P. 458-462.

3. Mitrishkin Y.V., Pavlova E.A., Kuznetsov E.A., Gaydamaka K.I. Continuous, saturation, and discontinuous tokamak plasma vertical position control systems // Fusion Engineering and Design. 2016. Vol. 108. P. 35-47.