

УДК 62-52.001.24

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПИД-РЕГУЛЯТОРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА ЗАДАННУЮ СТЕПЕНЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

Г.К. Аязян

Уфимский государственный нефтяной технический университет
Россия, 450064, Уфа, Космонавтов ул., 1
E-mail: ayazyangk@rambler.ru

Е.В. Таушева

Уфимский государственный нефтяной технический университет
Россия, 450064, Уфа, Космонавтов ул., 1
E-mail: TaushevaEV@mail.ru

Ключевые слова: дробный ПИД-регулятор, D-разбиение, степень колебательности, КНВ, системы с запаздыванием.

Аннотация: В работе рассматривается параметрический синтез ПИД-регулятора дробного порядка оптимизацией по интегральным критериям качества с ограничением по степени колебательности. Использование критерия компенсации низкочастотных возмущений КНВ позволяет уменьшить число настраиваемых параметров. Исследования проводились в системе символьных вычислений Maple. Разработаны алгоритм и программа расчета настроек дробно-степенного ПИД регулятора. Алгоритм проверен на тестовых примерах, включая астатические и неустойчивые объекты, объекты с запаздыванием. Получены номограммы зависимостей настроек регулятора для типовой модели объекта первого порядка с запаздыванием.

1. Введение

В последние годы внимание исследователей привлекли системы управления с ПИД-регуляторами дробного порядка. Применение таких регуляторов позволяет во многих случаях улучшить качество систем регулирования. Указанной проблеме посвящено достаточно много работ. Математические основы дробного дифференцирования и интегрирования и применение их для синтеза систем управления детально рассмотрены в статьях [1, 2], там же приведен обширный список литературы. Как и в случае регуляторов целого порядка, задача синтеза решается как с помощью частотных, так и корневых методов. Задача синтеза усложняется появлением двух дополнительных параметров: дробных порядков интегратора δ и дифференциатора β . В работе с целью уменьшения числа настраиваемых параметров коэффициент усиления дифференциальной части ПИД регулятора определяется из критерия компенсации низкочастотных возмущений [3,5]. Решение задачи основано на методе D-разбиения [4]. В плоскости коэффициентов усиления пропорциональной и интегральной частей ПИД-регулятора строится граница области заданной степени колебательности для нескольких значений δ и β . Оптимальные значения параметров находятся из условия минимума интеграль-

ных или временных показателей качества после построения переходных процессов по каналу возмущения.

2. Постановка задачи и алгоритм решения

2.1. Постановка задачи

Рассматривается система регулирования с одним входом и одним выходом. Передаточная функция ПИД - регулятора дробного порядка имеет вид

$$(1) \quad W_p(s) = K_1 + \frac{K_0}{s^\delta} + K_2 s^\beta = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s^\delta} + T_d s^\beta \right),$$

где K_0 , K_1 , K_2 - коэффициенты усиления – настроечные параметры регулятора, $T_I = \frac{K_1}{K_0}$, $T_D = \frac{K_2}{K_1}$ - время интегрирования и дифференцирования соответственно, δ , β - дробные показатели степеней интегратора и дифференциатора, $\delta > 0$, $\beta > 0$.

Будем рассматривать модели объектов с передаточными функциями вида

$$(2) \quad W_y(s) = \frac{1}{s^r} W_{y1}(s) = \frac{1}{s^r} \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} e^{-s\tau}$$

где $W_{y1}(s)$ - пропорциональная часть модели объекта, $|W_{y1}(0)| = |b_0/a_0| < \infty$; $r = 0, 1$; a_i, b_i - постоянные коэффициенты, $a_n > 0, b_0 > 0$; $m \leq n$; τ - транспортное запаздывание.

Показатели степеней s в (2) могут быть дробными.

Настройки регулятора будем определять из условия минимума интегральных критериев при ограничении на заданную степень колебательности m , где $m = \min_i |\operatorname{Im} s_i / \operatorname{Re} s_i|$, s_i – корни характеристического полинома замкнутой системы.

Из критерия КНВ следуют следующие ограничения на коэффициенты регулятора K_0 , K_2 [3,5]

$$(3) \quad K_0 = \max K_0$$

$$K_2 = \alpha \frac{K_1^2}{K_0} + \alpha_1 \frac{K_1}{K_0} + \frac{\alpha_1^2}{2 \cdot K_0} + \alpha_2 K_0 + \alpha_3 = \frac{(\alpha_1 + K_1)^2}{2K_0} + \alpha_2 K_0 + \alpha_3,$$

где $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_0}$, $\alpha_2 = \frac{\mu_1^2 - 2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_2}{2 \cdot \mu_0^2}$, $\alpha_3 = \frac{\mu_1}{\mu_0^2}$, $\mu_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} W_{y1}(s) \Big|_{s=0}$, $k = 0, 1, 2$ моменты передаточной функции W_{y1} .

Первое ограничение в (5) соответствует минимуму линейного интегрального критерия качества IE [6]. Формулы для $\alpha_i, i \in 1, 3$ зависят от свойств объекта и точки приложения возмущения. Для возмущения, действующего на входе объекта $\alpha_2 = 0$, для астатического объекта $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_3 = -1/\mu_0$. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и α константа, получим известную формулу $K_2 = \alpha K_1^2 / K_0$, $\alpha > 0$.

В дальнейшем ограничимся задачей компенсации возмущения действующего на входе объекта и будем считать, что $\alpha_2 = 0$.

2.1. Алгоритм решения задачи

Уравнение границы области $m \geq m_{зад}$ (кривую D-разбиения) находим из характеристического уравнения замкнутой системы [4]

$$(4) \quad W_p(s) \cdot W_y(s) + 1 = (K_1 + K_0 s^{-\delta} + K_2 s^\beta) W_y(s) + 1 = 0$$

подстановкой $s = -m\omega + j\omega$, где здесь и в дальнейшем $m = m_{зад}$, $\omega \geq 0$, $j = \sqrt{-1}$.

В результате получаем уравнение

$$(5) \quad (K_1 + K_0(-m\omega + j\omega)^{-\delta} + K_2(-m\omega + j\omega)^\beta)(V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega)) + 1 = 0,$$

где $W_y(m, \omega) = V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega)$ - расширенная частотная характеристика объекта,

$W_p(m, \omega) = K_1 + K_0\omega^{-\delta}A + K_2\omega^\beta B + j(-K_0\omega^{-\delta}C + K_2\omega^\beta D)$ - расширенная афх регулятора,

$A = (m^2 + 1)^{-\delta/2} \cos(\pi\delta/2 + \delta \cdot \arctan(m))$, $B = (m^2 + 1)^{-\beta/2} \cos(\pi\delta/2 + \beta \cdot \arctan(m))$,

$C = (m^2 + 1)^{-\delta/2} \sin(\pi\delta/2 + \delta \cdot \arctan(m))$, $D = (m^2 + 1)^{-\beta/2} \sin(\pi\delta/2 + \beta \cdot \arctan(m))$.

После преобразований получим

$$(6) \quad Dz = (K_1 + K_0\omega^{-\delta}A + K_2\omega^\beta B + j(K_0\omega^{-\delta}C + K_2\omega^\beta D))(V_1 + jV_2) + 1.$$

Выделяя в (6) действительную и мнимую части, подставив выражение (3) для K_2 , и преобразуя, получим систему двух полиномиальных уравнений относительно K_1 с коэффициентами зависящими от K_0, ω и показателей дробных степеней δ и β

$$(7) \quad \begin{cases} A_2 \cdot K_1^2 + A_1 \cdot K_1 + A_0 = 0 \\ B_2 \cdot K_1^2 + B_1 \cdot K_1 + B_0 = 0 \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= (\omega^{-\delta} \cdot (A \cdot V_1 - C \cdot V_2) + \alpha_2 \cdot \omega^\beta \cdot (V_1 \cdot B - V_2 \cdot D)) \cdot K_0^2 + \\ &+ (1 + \alpha_3 \cdot \omega^\beta \cdot (B \cdot V_1 - D \cdot V_2)) \cdot K_0 + 0.5 \cdot \alpha_1^2 \cdot \omega^\beta \cdot (B \cdot V_1 - D \cdot V_2), \\ A_1 &= V_1 \cdot K_0 + \alpha_1 \cdot \omega^\beta \cdot (V_1 \cdot B - D \cdot V_2), \quad A_2 = 0.5 \cdot \omega^\beta \cdot (B \cdot V_1 - D \cdot V_2), \\ B_0 &= (\omega^{-\delta} \cdot (C \cdot V_1 + A \cdot V_2) + \alpha_2 \cdot \omega^\beta \cdot (D \cdot V_1 + B \cdot V_2)) \cdot K_0^2 + \\ &+ \alpha_3 \cdot \omega^\beta \cdot (D \cdot V_1 + B \cdot V_2) \cdot K_0 + 0.5 \cdot \alpha_1^2 \cdot \omega^\beta \cdot (D \cdot V_1 + B \cdot V_2), \\ B_1 &= V_2 \cdot K_0 + \alpha_1 \cdot \omega^\beta \cdot (D \cdot V_1 + B \cdot V_2), \quad B_2 = 0.5 \cdot \omega^\beta \cdot (V_1 \cdot D + V_2 \cdot B). \end{aligned}$$

Решение полиномиальных уравнений (7) подробно описано в работах [3, 5, 7]. Приравняв нулю результат системы (7), после преобразований получим полином 2-го порядка относительно K_0

$$(8) \quad Ax \cdot K_0^2 + Bx \cdot K_0 + Cx = 0,$$

где

$$\begin{aligned} Ax &= (\omega^{2\beta-2\delta} (B \cdot C - A \cdot D)^2 + 2 \cdot D (\alpha_2 D \cdot \omega^{2\beta} + C \omega^{\beta-\delta})) \cdot (V_1^2 + V_2^2)^2, \\ Bx &= 2(\alpha_3 \omega^{2\beta} D^2 (V_1^2 + V_2^2)^2 + \alpha_1 \omega^{2\beta-\delta} D (B \cdot C - A \cdot D) (V_1^2 + V_2^2)^2 + \\ &+ \omega^{2\beta-\delta} (A \cdot D - B \cdot C) (D \cdot V_1 + B \cdot V_2) (V_1^2 + V_2^2) - \omega^\beta D V_2 (V_1^2 + V_2^2)), \\ Cx &= \omega^{2\beta} \cdot (D \cdot V_1 + B \cdot V_2 - \alpha_1 \cdot D \cdot (V_1^2 + V_2^2))^2. \end{aligned}$$

Решение уравнения (8), отвечающее положительности K_0 имеет вид

$$(9) \quad K_0 = \frac{-Bx - \sqrt{Bx^2 - 4 \cdot Ax \cdot Cx}}{2 \cdot Ax}$$

Для определения K_1 система уравнений (7) решается методом Крамера

$$(10) \quad K_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(BC - AD)\omega^{-\delta}}{D} K_0 - \frac{(DV_1 + BV_2)}{D(V_1^2 + V_2^2)}.$$

Изменяя значения ω по уравнениям (9) и (10) рассчитывается кривая D-разбиения.

2.3. Результаты расчетов

Расчеты настроек проводились для различных моделей. На рис. 1 приведены результаты для модели $W_y = 1/(s+1)^3$, на рис. 2-4 – для модели с запаздыванием $W_y = e^{-\tau s}/(Ts+1)$. Значения параметров δ, β варьировались в диапазоне $0,7 \leq \delta, \beta \leq 1,2$; отношение T/τ в диапазоне $0,2 \leq T/\tau \leq 50$. Для полученных настроек были построены переходные характеристики по возмущающему воздействию методом Акульшина [8].

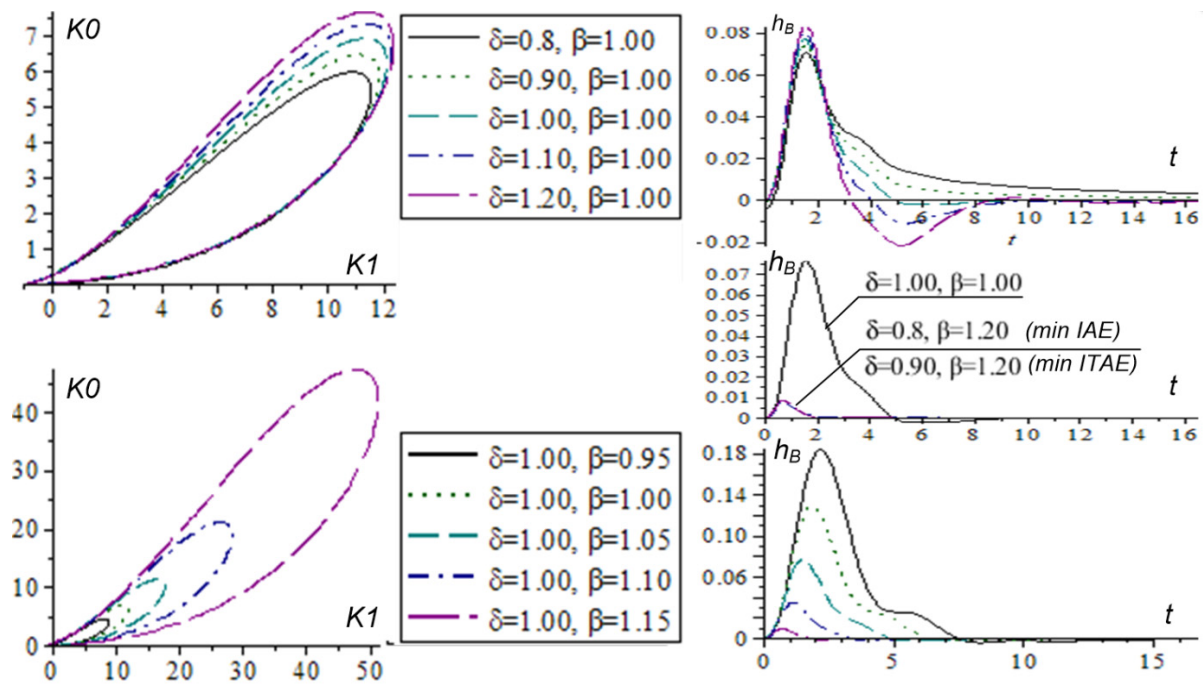


Рис. 1. Кривые D-разбиения (слева) и переходные процессы (справа) для объекта $W(s) = 1/(s+1)^3$. Справа в центре – процессы оптимальные по критериям *IAE*, *ITAE*.

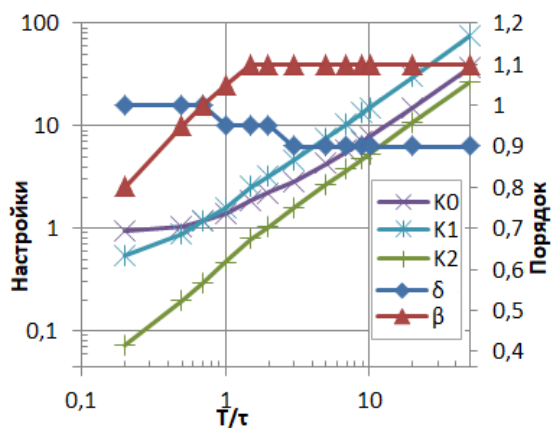
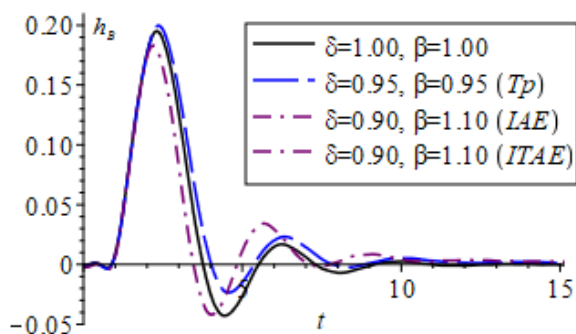
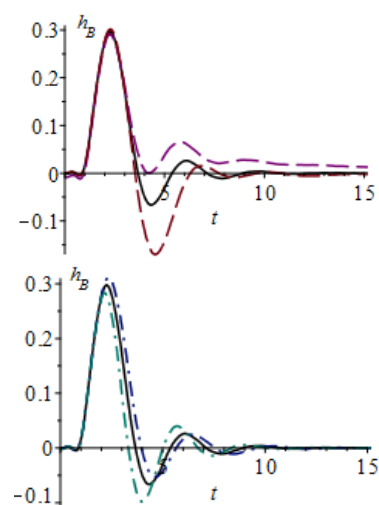
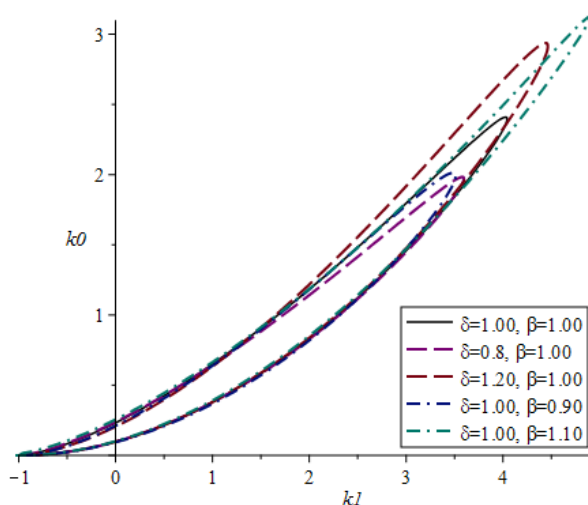


Рис. 2. Оптимальные настройки по ITAE.

Рис. 3. Оптимальные процессы $T/\tau=2$.Рис. 4. Кривые D-разбиения (слева) и переходные процессы для $W_y = e^{-\tau s} / (Ts + 1)$, $T/\tau=3$.

Затем отбирались процессы соответствующие минимуму времени регулирования, минимуму интегральных критериев *IAE* (интеграл модуля ошибки регулирования), *ITAE* (интеграл произведения модуля ошибки регулирования на время).

На рис. 2 приведены зависимости оптимальных значений K_0 , K_1 , K_2 , δ , β от T/τ , полученные минимизацией интегрального критерия *ITAE* для объекта 1-го порядка с запаздыванием. На рис. 3 построены переходные процессы по возмущающему воздействию оптимальные по времени регулирования T_p и критериям *IAE* и *ITAE*.

В заключение отметим, что тестовая проверка предложенного алгоритма показала его работоспособность. Использование дробного ПИД-регулятора позволяет во многих случаях улучшить качество регулирования. Эффективность алгоритма уменьшается при значительном увеличении транспортного запаздывания.

Список литературы

1. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. 2013. № 4. С. 3-42.
2. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 3-34.
3. Аязян Г.К., Новоженин А.Ю., Таушева Е.В. Параметрический синтез ПИД-регуляторов на заданную степень колебательности // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июля 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 147-159.
4. Бесекерский В.А., Попов В.Е. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 768 с.
5. Аязян Г.К., Таушева Е.В. Параметрический синтез ПИД-регуляторов с ограничениями // Сборник докладов XXI Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM-2018. Санкт-Петербург, 25-27 мая 2017 г. СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Т. 1. С. 356-360.
6. Ротач В.Я. Теория автоматического систем управления. М.: Изд-во МЭИ, 2004. 398 с.
7. Аязян Г.К., Таушева Е.В., Шаймухаметова М.Р. Применение системы символьных вычислений Maple для параметрического синтеза регуляторов // Материалы VI Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование МПМО17». Улан-Удэ-Байкал, 26 июня - 1 июля 2017 г. Изд-во ВСГУТУ, 2017. С. 59-64
8. Стефани Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. М.: Энергия, 1972. 376 с.