УДК 519.71: 681.51

О ПРОЕКТИРОВАНИИ НАБЛЮДАТЕЛЯ ПОЛНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В.Р. Барсегян
Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет
Армения, 0019, Ереван, пр. Баграмяна, 24
E-mail: barseghyan@sci.am

Ключевые слова: поэтапно меняющиеся управляемые системы, наблюдатель полного порядка, ошибка восстановления, матрицы усиления, вполне управляемость, обратная связь.

Аннотация: В работе рассматривается задача проектирования функционального наблюдателя полного порядка для поэтапно меняющихся линейных динамических систем. Для вполне управляемой поэтапно меняющейся стационарной системы с помощью выбора определенного базиса в пространстве состояний показано существование матриц усиления таких, что система будет вполне управляема. Показано, что с помощью невырожденного преобразования из одного базиса в специально выбранный базис и выбором обратной связи можно произвольно влиять на динамику вполне управляемой поэтапно меняющейся системы. Путем выбора матриц усиления можно обеспечить расположение всех корней характеристического уравнения замкнутой системы в левой полуплоскости.

1. Введение

Для формирования обратной связи в динамических системах управления необходима информация о векторе состояния объекта управления. На практике обычно реализация обратной связи по вектору состояния затруднена, поскольку для непосредственного измерения доступны только отдельные компоненты вектора состояния или линейные комбинации этих компонент, потому что либо число измерительных устройств ограничено, либо часть координат вектора состояния в принципе невозможно измерить. Таким образом, возникает необходимость восстановления неизмеряемых компонентов вектора состояния по известным значениям измеренных компонентов системы. Это задача наблюдения (восстановления) и является одной из фундаментальных задач в теории автоматического управления.

Для систем, допускающих восстановление вектора состояния по имеющейся информации (измерениям), встает задача о получении оценки вектора состояния. Для решения этой задачи используются вспомогательные динамические системы, которые формируют на выходе вектор оценки состояний. Такие динамические системы называют наблюдателями. Наблюдатель состояния объекта управления по существу является подстраиваемой моделью этого объекта. Если оценка вектора состояния асимптотически сходится к вектору состояния, то наблюдатель называют асимптотическим.

Задача о наблюдателях исследована для многих видов динамических систем, а для линейных стационарных систем эта задача полностью исследована [1-5]. Управляемость и наблюдаемость – два фундаментальных понятия теории управления – являются принципиальными как в задачах построения наблюдателей для обычных систем [1-4], так и в задачах построения наблюдателей для поэтапно меняющихся систем. В работах [6-9] получены необходимые и достаточные условия вполне управляемости и наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных систем и кусочно-линейных импульсных управляемых систем. Однако не исследованы проблемы, связанные с аналитическим построением наблюдателей для поэтапно меняющихся линейных систем, необходимость использования которых возникает во многих прикладных задачах систем управления.

В данной работе рассматривается задача аналитического построения функционального наблюдателя полного порядка для поэтапно меняющихся линейных динамических систем. Показано, что с помощью невырожденного преобразования из одного базиса в специально выбранный базис и выбором обратной связи можно произвольно влиять на динамику вполне управляемой поэтапно меняющейся системы

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными нестационарными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}=\begin{cases} A_1(t)x+B_1(t)u & \text{при} \quad t\in[t_0,t_1) \\ A_2(t)x+B_2(t)u & \text{при} \quad t\in[t_1,t_2) \\ \vdots & \\ A_m(t)x+B_m(t)u & \text{при} \quad t\in[t_{m-1},\infty) \end{cases}, \tag{1}$$

где $x(t)\in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B_k(t)$ ($k=\overline{1,m}$) – матрицы параметров системы (модели объекта), $u(t)$ – управляющее воздействие, соответственно с размерностями $A_k(t)-(n\times n)$, $B_k(t)-(n\times r)$, $u(t)-(r\times 1)$. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц-функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u(t)$ являются кусочно-непрерывными функциями.

Пусть задано начальное $x(t_0)=x_0$ – состояние системы (1). Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени $0\le t_0<t_1<...<t_{m-1}<t_m=T<\infty$ конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, т. е. в моменты времени t_k имеем условия связи $x(t_k-0)=x(t_k+0)=x(t_k)$ ($k=\overline{1,m-1}$).

Через $y(t)$ обозначим вектор $y(t)=(y_1(t),...,y_s(t))^T$, компоненты которого являются линейными комбинациями фазовых координат $x_i(t)$, т.е. будем считать, что

$$y=\begin{cases} G_1(t)x & \text{при} \quad t\in[t_0,t_1) \\ G_2(t)x & \text{при} \quad t\in[t_1,t_2) \\ \vdots & \\ G_m(t)x & \text{при} \quad t\in[t_{m-1},T] \end{cases}, \tag{2}$$

где $G_k(t)$ – непрерывные ($s\times n$) – матрицы размерностей ($k=\overline{1,m}$), причем $s<n$. Здесь и далее буква «T» в верхнем индексе означает операцию транспонирования. Предполагается, что компоненты $y_i(t)$ вектора $y(t)$ доступны наблюдению (измерению) на отрезке времени $t_0\le t\le T<\infty$, и, следовательно, по данным измерений известны функции $y_i=y_i(t)$ ($i=\overline{1,s}$), $t_0\le t\le T$.

В работе рассматривается задача построения наблюдателя полного порядка для поэтапно меняющейся линейной управляемой системы (1) с наблюдаемым вектором (2).

3. Об основных результатах

Идея построения наблюдателя состоит в получении оценки вектора состояния в текущий момент времени t по результатам измерений $y(t)$ и использовании этой оценки в управлении вместо $x(t)$. Тогда, чем точнее оценка вектора состояния, тем ближе синтезированная система по своим свойствам к реальной.

Для системы (1)-(2) наблюдатели полного порядка (оцениваемое состояние $\hat{x}(t)$ имеет размерность фазового состояния системы (1)) имеют следующую структуру:

(3) $$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} A_1(t)\hat{x} + B_1(t)u + L_1(t)\left[y(t) - G_1(t)\hat{x}\right] & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1) \\ A_2(t)\hat{x} + B_2(t)u + L_2(t)\left[y(t) - G_2(t)\hat{x}\right] & \text{при} \quad t \in [t_1, t_2) \\ \quad \vdots & \\ A_m(t)\hat{x} + B_m(t)u + L_m(t)\left[y(t) - G_m(t)\hat{x}\right] & \text{при} \quad t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}.$$

Матрицы $L_1(t)$, ..., $L_m(t)$ являются матрицами коэффициентов усиления наблюдателя соответствующего этапа.

Наблюдатель полного порядка включает модель системы, а также дополнительную переменную пропорциональную разность $y(t) - \hat{y}(t)$, где соотношение

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} G_1(t)\hat{x}(t) & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1) \\ G_2(t)\hat{x}(t) & \text{при} \quad t \in [t_1, t_2) \\ \quad \vdots & \\ G_m(t)\hat{x}(t) & \text{при} \quad t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}$$

является наблюдаемой переменной. Из уравнения (3) видно, что наблюдатель можно представить в виде

(4) $$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} \left[A_1(t) - L_1(t)G_1(t)\right]\hat{x}(t) + B_1(t)u + L_1(t)y(t) & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1) \\ \left[A_2(t) - L_2(t)G_2(t)\right]\hat{x}(t) + B_2(t)u + L_2(t)y(t) & \text{при} \quad t \in [t_1, t_2) \\ \quad \vdots & \\ \left[A_m(t) - L_m(t)G_m(t)\right]\hat{x}(t) + B_m(t)u + L_m(t)y(t) & \text{при} \quad t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}.$$

Введем ошибку восстановления

(5) $$e(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

Выполнив дифференцирование (5) и подставляя (1) и (3) в полученное выражение, получим

(6) $$\dot{e} = \begin{cases} \left[A_1(t) - L_1(t)G_1(t)\right]e(t) & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1) \\ \left[A_2(t) - L_2(t)G_2(t)\right]e(t) & \text{при} \quad t \in [t_1, t_2) \\ \quad \vdots & \\ \left[A_m(t) - L_m(t)G_m(t)\right]e(t) & \text{при} \quad t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}.$$

Сравнение уравнений (4) и (6) показывает, что устойчивость наблюдателя и асимптотическое поведение ошибки восстановления определяются поведениями матриц $A_k(t) - L_k(t)G_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$). Поэтому ошибка восстановления $e(t)$ достигает нуля независимо от ее начального состояния тогда и только тогда, когда наблюдатель асимптотически устойчив.

Следовательно, синтез наблюдателя состоит в определении таких матриц коэффициентов усиления $L_k(t)$ ($k=\overline{1,m}$), для которых уравнение ошибки восстановления (6) асимптотически устойчиво. В случае системы с постоянными параметрами, включая матрицу коэффициентов усиления L_k, устойчивость наблюдателя следует из расположения характеристических чисел матриц $A_k - L_k G_k$.

Рассматривается поэтапно меняющийся линейный стационарный процесс

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + B_1 u & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1) \\ A_2 x + B_2 u & \text{при} \quad t \in [t_1, t_2) \\ \quad \vdots & \\ A_m x + B_m u & \text{при} \quad t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} . \tag{7}$$

Известно [6-8], что поэтапно меняющаяся линейная стационарная система (7) с условиями $x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k)$ ($k=\overline{1,m-1}$) вполне управляема на отрезке времени $t_0 \le t \le T$ тогда и только тогда, когда матрица управляемости

$$K = \left\{ B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n-1} B_1, \dots, B_m, A_m B_m, \dots, A_m^{n-1} B_m \right\} \tag{8}$$

имеет ранг, равный n. Отметим, что размерность матрицы управляемости (8) равна ($n \times mnr$).

Исходя из условия вполне управляемости для поэтапно меняющейся линейной стационарной системы, с помощью выбора определенного базиса в пространстве состояний показано существование матриц усиления таких, что система с матрицами усиления будет вполне управляема. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если поэтапно меняющаяся линейная стационарная система (7) вполне управляема на отрезке времени $t_0 \le t \le T$, то для любых ненулевых столбцов $b_1^{(i_1)}$, $b_2^{(i_2)}$, $b_m^{(i_m)}$ ($1 \le i_k \le r$, $k=\overline{1,m}$) матриц B_1, B_2, …, B_m существуют такие постоянные матрицы L_1, L_2, …, L_m размерностью ($r \times n$), что система*

$$\dot{x} = \begin{cases} \left(A_1 - B_1 L_1\right) x + b_1^{(i_1)} u_{i_1} & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1), \\ \left(A_2 - B_2 L_2\right) x + b_2^{(i_2)} u_{i_2} & \text{при} \quad t \in [t_1, t_2), \\ \quad \vdots & \\ \left(A_m - B_m L_m\right) x + b_m^{(i_m)} u_{i_m} & \text{при} \quad t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}$$

вполне управляема.

Выбирается определенный базис в пространстве состояний для того, чтобы матрицы системы имели минимальное число ненулевых элементов. Подобные представления удобны при вычислениях, при моделировании системы и исследованиях свойств обратной связи стационарных систем.

В работе показано, что с помощью невырожденного преобразования матрицы из одного базиса в специально выбранный базис и выбором обратной связи можно произвольно влиять на динамику вполне управляемой поэтапно меняющейся системы. В частности, вполне управляемую поэтапно меняющуюся систему со скалярным управлением можно преобразовать так, чтобы она имела заранее заданные корни характеристического уравнения. Следовательно, путем выбора матриц усиления, можно обеспечить расположение всех корней характеристического уравнения замкнутой системы в левой полуплоскости, то есть ошибка оценивания асимптотически стремится к нулю.

Список литературы

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 656 с.
3. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006. 272 с.
4. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
5. Асанов А.З., Демьянов Д.Н. Аналитический синтез функциональных наблюдателей // Изв. вузов. Авиационная техника. 2013. № 4. С. 13-18.
6. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры // Труды VIII Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис-Степанакерт, 22-26 сентября, 2014 г. С. 83-87.
7. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
8. Barseghyan V.R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // Proceedings of the 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia, 2016. P. 33-35.
9. Hong Shi, Guangming Xie. Controllability and Observability Criteria for Linear Piecewise Constant Impulsive Systems // Journal of Applied Mathematics. 2012. Vol. 2012. Article ID 182040, 24 p.