УДК 517.97

О ЗАДАЧАХ ДОСТИЖИМОСТИ В СИСТЕМАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М.И. Гусев

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского

Россия, 620990, Екатеринбург, Софьи Ковалевской ул., 16

E-mail: gmi@imm.uran.ru

И.В. Зыков

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского

Россия, 620990, Екатеринбург, Софьи Ковалевской ул., 16

E-mail: zykoviustu@mail.ru

Ключевые слова: Управляемая система, изопериметрические ограничения, множество достижимости, принцип максимума.

Аннотация: В докладе рассматриваются нелинейные управляемые системы, линейные по управляющим переменным. Ограничения на управление и траекторию системы заданы в виде неравенства для интегрального функционала или системой таких неравенств, начальное состояние системы принадлежит заданному множеству. Целью работы является описание границы множества достижимости системы в заданный момент времени. Показано, что допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления (локальным слабо эффективным решением задачи с векторным критерием) при условии полной управляемости линеаризованной системы. Критериями являются интегральные функционалы, задающие ограничения задачи. Доказательство опирается на теорему Грейвса для накрывающих отображений. Получены необходимые условия оптимальности управлений, приводящих на границу множества достижимости, в форме принципа максимума Понтрягина. Во второй части доклада рассмотрены методы получения внешних оценок множеств достижимости систем с интегральными ограничениями, основанные на дифференциальных неравенствах и принципе сравнения.

1. Введение

Рассматривается задача описания границы множества достижимости в фиксированный момент времени для нелинейной управляемой системы с совместными интегральными ограничениями на управление и траекторию. Для линейных управляемых систем с выпуклыми квадратичными ограничениями множество достижимости при фиксированном начальном состоянии системы представляет из себя эллипсоид, параметры которого допускают конструктивное описание [1]. В случае нелинейной управляемой системы множество достижимости, как правило, не является выпуклым, его описание и приближенное построение представляет более трудную задачу.

Свойства множеств достижимости для систем с интегральными ограничениями и алгоритмы их построения изучались в работах [2–5]. Здесь исследуется случай, когда подынтегральная функция в функционалах, задающих ограничения, зависит не только от управления, но и от фазовых переменных системы. Показано, что управления, переводящие систему на границу множества достижимости, являются локальными решениями вспомогательных задач оптимального управления, что позволяет для построения множества достижимости использовать соотношения принципа максимума Понтрягина. Для систем с геометрическими ограничениями на управления принцип максимума применяется при построении множеств достижимости достаточно широко (см., например, [6–9]). Во второй части доклада рассмотрено применение внешних оценок множеств достижимости, основанных на дифференциальных неравенствах Гамильтона-Якоби и принципе сравнения [10–13] к системам с интегральными ограничениями.

2. Описание границы множества достижимости

Управляемая система имеет вид

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x(t_0) \in X^0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n\times r}$ — непрерывные и непрерывно дифференцируемые по x отображения, удовлетворяющие условиям, обеспечивающим продолжимость решений на промежуток $[t_0, t_1]$, X^0 — заданное подмножество $\mathbb{R}^n$. Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы по x, а также удовлетворяют, соответственно, условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\| f_1(t, x) \| \leqslant l_1(t)(1+ \| x \|), \quad \| f_2(t, x) \|_{n\times r} \leqslant l_2(t),$$

где $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$, $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$. Для любого управления $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ на промежутке $[t_0, t_1]$ существует единственное абсолютно непрерывное решение $x(t) = x(t, x^0, u(\cdot))$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Обозначим $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(Q(t, x(t)) + u^\top(t)R(t, x(t))u(t)\big)\, dt$, где функция $Q(t, x) \geqslant 0$ и положительно определенная матрица $R(t, x)$ непрерывны на $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, а $x(\cdot)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $x(t_0) \in X^0$, назовем допустимым управляемым процессом, если $J(x(\cdot), u(\cdot)) \leqslant \mu^2$, $\mu > 0$ – заданное число. Множество достижимости $G(t_1)$ определяется как множество векторов $x(t_1)$, отвечающих всевозможным допустимым процессам.

Теорема 1. *Пусть допустимый управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ удовлетворяет условию $\hat{x}(t_1) \in \partial G(t_1)$, и пусть линеаризация системы (1) вдоль $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ вполне управляема. Тогда $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ является локальным в пространстве $C \times \mathbb{L}_2$ решением экстремальной задачи*

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \to \min, \quad x(t_0) \in X^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2, \tag{2}$$

где $x^1 = \hat{x}(t_1)$, при этом $J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \mu^2$.

Опишем кратко схему доказательства. Предположим, что $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ не является локальным минимумом, тогда для каждого $p \in \mathbb{N}$ найдется удовлетворяющий терминальным условиям процесс $(x_p(\cdot), u_p(\cdot))$, такой что $\| \hat{u}(\cdot) - u_p(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \frac{1}{p}$,

$\| \hat{x}(\cdot) - x_p(\cdot) \|_C < \frac{1}{p}$, и $J(x_p(\cdot), u_p(\cdot)) < \mu^2$. Выберем последовательности $u_p(\cdot) \to \hat{u}(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$, $p \to \infty$, $x_p(t_0) \in X^0$, $x_p(t_0) \to \hat{x}(t_0)$, такие что $\bar{J} = J(x_p(\cdot), u_p(\cdot)) < \mu^2$. При достаточно большом $\bar{p}$ линеаризованная в окрестности $(x_{\bar{p}}(t), u_{\bar{p}}(t))$ система вполне управляема на $[t_0, t_1]$. Положим $\delta = \mu^2 - \bar{J}$. Из непрерывности функционала J получим, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ из неравенства $\| v(\cdot) - u_{\bar{p}}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \varepsilon$, $v(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ следует $|J(z(\cdot), v(\cdot)) - J(x_{\bar{p}}(\cdot), u_{\bar{p}}(\cdot))| < \delta/2$, где $z(t)$ траектория системы (1), порождаемая управлением $v(\cdot)$ и начальным вектором $z(t_0) = x_{\bar{p}}(t_0) \in X^0$. Таким образом, $J(z(\cdot), v(\cdot)) < J(x_{\bar{p}}(\cdot), u_{\bar{p}}(\cdot)) + \delta/2 < \mu - \delta/2$. Из управляемости линеаризованной системы следует (см., например, [2]), что $ImF'(u_{\bar{p}}(\cdot)) = \mathbb{R}^n$, где F — отображение из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{R}^n$, определяемое равенством $F(u(\cdot)) = x(t_1, x_{\bar{p}}(t_0), u(\cdot))$. Из теоремы Люстерника-Грейвса [14] следует существование $s > 0$, такого что для достаточно малых $0 < r < \varepsilon$ образ шара $B(u_{\bar{p}}(\cdot), r)$ содержит шар радиуса sr с центром $^1 = F(u_{\bar{p}}(\cdot))$: $B(y^1, sr) \subset F(B(u_{\bar{p}}(\cdot), r))$. Отсюда получаем

$$B(y^1, sr) \subset Z(t_1) := \{x(t_1, x_{\bar{p}}(t_0), v(\cdot)) : \| v(\cdot) - u_{\bar{p}}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \varepsilon\}.$$

Так как $J(x(t_1, x_{\bar{p}}(t_0), v(\cdot)), v(\cdot)) < \mu$, то $B(y^1, sr) \subset G(t_1)$ в противоречие с допущением.

В задаче оптимального управления (2) имеются терминальные ограничения на траекторию, но нет ограничений на управление. Учитывая, что локальный экстремум в пространстве $\mathbb{L}_2$ допускает игольчатые вариации управления, нетрудно показать, что управление, переводящее траекторию на границу множества достижимости удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Условия трансверсальности в принципе максимума зависят от вида множества начальных векторов X^0, заметим, что формулировка приведенной теоремы не предполагает каких либо условий для X^0. Соотношения принципа максимума могут быть положены в основу численных алгоритмов для построения множеств достижимости (см. [15–17])

3. Принцип сравнения и внешние оценки множества достижимости

Рассмотрим управляемую систему (1) при условии, что f_1, f_2 являются функциями только от x, начальное состояние системы фиксировано $X^0 = \{x^0\}$, $t_0 = 0$, а интегральное ограничение на управление имеет вид

$$\int_0^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \leqslant \mu^2, \quad \mu > 0.$$

Пусть известно множество $D \subset \mathbb{R}^n$ (априорная оценка), которое содержит точки всех допустимых траекторий, удовлетворяющих заданному начальному условию и и интегральному ограничению на управление. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $v(x)$ на D, такую что $v(x^0) = 0$.

Предположение. *Пусть на множестве D выполняются неравенства $\nabla v(x) f_1(x) \leqslant -\alpha v(x)$ и $\|\nabla v(x) f_2(x)\|^2 \leqslant \beta^2 v(x)$. Здесь α и $\beta > 0$ заданные константы, через $\nabla v(x)$ обозначен градиент функции v.*

Заметим, что из второго неравенства следует неотрицательность $v(x)$.

Дифференцируя $v(x(t))$ вдоль допустимой траектории $x(t)$ получим

$$\dot{v}(x(t)) = \nabla v(x)\left(f_1(x) + f_2(x)u\right) = \nabla v(x) f_1(x) + \nabla v(x) f_2(x)u,$$

откуда следует, что

$$v(x(t)) = \int_0^t \nabla v(x(s)) f_1(x(s))ds + \int_0^t \nabla v(x(s)) f_2(x(s))u(s)ds,$$

$$v(x(t)) \leqslant -\alpha \int_0^t v(x(s))ds + \left(\int_0^t \|u(s)\|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla v(x(s)) f_2(x(s))\|^2 ds\right)^{1/2},$$

$$v(x(t)) \leqslant -\alpha \int_0^t v(x(s))ds + \mu\beta \left(\int_0^t v(x(s))ds\right)^{1/2}.$$

Последняя оценка эквивалентна неравенству

$$\dot{f}(t) \leqslant -\alpha f(t) + \mu\beta \cdot f(t)^{1/2},$$

если обозначить $f(t) = \int_0^t v(x(s))ds$.

Поставим в соответствие этому неравенству уравнение сравнения

$$\dot{w} = -\alpha w + \mu\beta \cdot w^{1/2}$$

с начальным условием $w(0) = f(0) = 0$.

Если $\alpha = 0$, то для максимального решения уравнения справедлива формула $\bar{w}(t)^{1/2} = \frac{\mu\beta}{2}t, \quad t \in [0, t_1]$. Из теорем сравнения [18] получаем при $t \in [0, t_1]$ неравенство $f(t) \leqslant \bar{w}(t)$. В таком случае $v(x(t)) \leqslant \psi(t) = \frac{\mu^2\beta^2}{2}t$.

При $\alpha > 0$ сделаем замену $y = w^{1/2}$ в уравнении сравнения, которая приводит к линейному уравнению

$$\dot{y} = -\frac{\alpha}{2}y + \mu\beta, \quad y(0) = w(0)^{1/2} = 0.$$

Формула для максимального решения выглядит следующим образом

$$\bar{w}(t)^{1/2} = \frac{2\mu\beta}{\alpha}\left(1 - \exp(-\frac{\alpha}{2}t)\right), \quad t \in [0, t_1].$$

Учитывая цепочку неравенств

$$v(x(t)) \leqslant -\alpha f(t) + \mu\beta \cdot f(t)^{1/2} \leqslant \mu\beta \cdot f(t)^{1/2},$$

по аналогии со случаем ($\alpha = 0$) получаем, что

$$v(x(t)) \leqslant \psi(t) = \frac{2\mu^2\beta^2}{\alpha}\left(1 - \exp(-\frac{\alpha}{2}t)\right).$$

Последнюю оценку можно улучшить, если в качестве $\psi(t)$ взять

$$\psi(t) = \max_{0 \leqslant f \leqslant \bar{w}(t)} \{-\alpha f + \mu\beta f^{\frac{1}{2}}\}.$$

Вычисляя максимум, получим, что $\psi(t) = \mu^2\beta^2/4\alpha$, если $\mu^2\beta^2/4\alpha^2 \leqslant \bar{w}(t)$ и $\psi(t) = -\alpha\bar{w}(t) + \mu\beta\bar{w}(t)^{\frac{1}{2}}$ в противном случае.

Таким образом, мы имеем оценку сверху для множества достижимости вида

$$G(t_1) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \leqslant \psi(t_1)\},$$

где функция $\psi(t)$ определяется одной из приведенных выше формул.

В докладе обсуждаются результаты численного моделирования для ряда примеров.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-29-04191-офи-м).

Список литературы

1. *Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.*
2. *Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis 11. 2004. C. 255-267.*
3. *Dar'in A.N., Kurzhanskii A.B. Control under indeterminacy and double constraints // Differential Equations. 2004. Vol. 39, No. 11. P. 1554–1567.*
4. *Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2007. Vol. 14, No. 1-2. P. 57-73.*
5. *Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. P. 261-268.*
6. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 320-328.*
7. *Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of Reachable Sets using Optimal Control Algorithms // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2013. Vol. 3, No. 3. P. 519-548.*
8. *Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.*
9. *Гусев М.И. О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Vol. 19, № 1. С. 81-86.*
10. *Куржанский А. Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1ю С. 173-183.*
11. *Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Оптимальное управление и динамические системы. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ, 2006. Т. 110. С. 76-108.*
12. *Гусев М.И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 60-69.*
13. *Никольский М.С. Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов // Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. Москва, 2018. С. 194-196.*
14. *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35, № 6. С. 11-46.*
15. *Gusev M.I., Zykov I.V. On Extremal Properties of Boundary Points of Reachable Sets for a System with Integrally Constrained Control // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 4082-4087.*
16. *Gusev M.I. An algorithm for computing boundary points of reachable sets of control systems under integral constraints // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3, P. 44-51.*
17. *Gusev M. On Reachability Analysis of Nonlinear Systems with Joint Integral Constraints // Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2017. Lecture Notes in Computer Science. 2018. Vol. 10665. P. 219-227.*
18. *Walter W. Differential and integral inequalities. Berlin: Springer, 1970.*