УДК 681.5: 519.714

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПОЛИНОМОВ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Захватов
Воронежский государственный технический университет
Россия, 394026, Воронеж, Московский проспект, 14
E-mail: v.zakhvatov@bk.ru

Ключевые слова: компьютерная алгебра, символьные вычисления, синтез систем управления, метод полиномиальных уравнений.

Аннотация: Рассматриваются методы полиномиальной компьютерной алгебры и символьных вычислений как инструмент построения эффективных систем управления. Показаны преимущества символьного способа решения полиномиальных уравнений для синтеза регуляторов. Получено полное аналитическое решение (параметризация) задачи синтеза регуляторов первого порядка. На примерах показана возможность обеспечения разнообразных практических требований к проектируемым системам.

1. Введение

Компьютерная алгебра является одним из сравнительно новых математических инструментов, получивших за последнее время стремительное развитие. Средства символьных вычислений есть во всех основных системах компьютерной математики [1]. В сфере автоматического управления символьные вычисления пока еще не нашли систематического применения, хотя достаточно примеров успешного решения задач на их основе [2, 3]. Аналитические матричные методы в последнее время применяются для управления сложными многомерными объектами аэрокосмической техники [4]. Но на нижнем уровне автоматизации наиболее массовых, одномерных объектов и процессов сложился явный дефицит новых подходов. Разработчики-практики и пользователи современных систем управления обычно предпочитают простые в расчете и настройке «типовые» регуляторы, имеющие невысокий динамический порядок. Предлагаемые сегодня методы синтеза, с преобладанием оптимизационной идеологии, не в полной мере удовлетворяют современного инженера-практика как с точки зрения сложности и трудоемкости процесса проектирования, так и со стороны получаемых в результате технических показателей качества. Специалисты отмечают увеличение разрыва теории с практическими задачами, вытеснение технического аспекта на второй план и связанное с этим отсутствие эффективных методических рекомендаций и стандартов для инженеров-разработчиков, что не позволяет резко повысить качество проектов в соответствии с требованиями времени [5]. Необходимость преодоления некоторой сложившейся диспропорции между теорией и практикой автоматизации служит стимулом к поиску новых решений, более действенных методов проектирования систем.

Сегодня одной из первоочередных является проблема управления объектами с изменяющимися или неопределенными характеристиками путем синтеза робастных регуляторов, способных без перенастройки управлять определенным классом объектов, или одним объектом в широком диапазоне изменения его параметров, нагрузок и внешних воздействий. Неопределенные параметры обычно представляют в виде интервальных чисел, что не всегда удобно. Более обоснованной может быть параметризация неопределенных параметров в виде символов. Кроме того, существует проблема выбора желаемой эталонной модели систем при их разработке. Известные методы синтеза не всегда учитывают особенности динамики объектов управления, часто модель системы назначается в численном виде из эмпирических соображений. Согласовать динамические свойства объекта и замкнутой системы гораздо проще, если обеспечить свободу выбора, вариативность допустимой модели системы, на основе, например, принципа параметризации желаемого распределения полюсов [6]. Это делает актуальным поиск несложных алгоритмов, ориентированных на аналитические решения задач управления.

Одним из практичных инструментов синтеза систем является метод полиномиальных уравнений, с использованием аппарата передаточных функций. Он в настоящее время получает распространение в силу его возможностей обеспечивать реальные инженерные требования к проектируемым системам, с учетом прямых показателей качества [7, 8]. Однако численные процедуры синтеза предполагают задание строго определенных значений параметров управляемого объекта и желаемой модели замкнутой системы. В случае изменения этих параметров по каким-либо причинам приходится повторять заново всю процедуру проектирования. Облегчить трудоемкость синтеза качественных алгоритмов управления могло бы получение прямых аналитических зависимостей настроек регулятора от параметров объекта и желаемой модели замкнутой системы. Но из-за сложности символьных вычислений это осуществимо только для систем с ограниченным количеством параметров, представленных в аналитической форме. Другие параметры, менее подверженные изменениям, могут назначаться в виде чисел. При этом полиномиальные уравнения синтеза приобретают комбинированный, символьно-численный вид. Для их решения необходимо использование возможностей компьютерной алгебры полиномов.

2. Символьный способ решения полиномиальных уравнений

Традиционная постановка задачи синтеза регуляторов методом численного решения линейных полиномиальных уравнений относительно комплексной переменной Лапласа s, для объекта с передаточной функцией $W_0(s) = B(s)/A(s)$ и желаемого эталона в виде характеристического полинома (ХП) системы управления $C(s)$, заданных в численной форме, заключается в следующем [7, 8]. Требуется найти значения неизвестных параметров регулятора $W_P(s) = Y(s)/X(s)$, обеспечивающего приближение свойств замкнутой системы к заданному эталону. Все желаемые полюсы системы, являющиеся корнями полинома $C(s)$, назначаются заранее. Полиномиальное уравнение синтеза (1), иногда называемое тождеством Безу, решается в численном виде относительно неизвестных операторных многочленов регулятора $X(s)$, $Y(s)$:

(1) $$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s).$$

Новая постановка задачи синтеза на основе символьного расширения метода полиномиальных уравнений состоит в замене численных значений параметров ХП на обобщенное алгебраическое представление. В аналитически заданном эталоне, в отличие от традиционного численного, области локализации корней ХП являются в общем случае неопределенными и рассредоточенными в левой части комплексной плоскости. При необходимости обеспечения требуемых динамических свойств системы, часть полюсов могут назначаться в численной форме, а остальные считаются неопределенными. Кроме того, на аналитические эквиваленты могут заменяться некоторые неопределенные либо изменяющиеся параметры объекта $W_0(s)$. Процедура поиска решения состоит в символьных операциях с уравнениями. Структура ХП замкнутой системы назначается в обобщенном аналитическом либо в численно-аналитическом виде:

(2) $$C(s;\alpha_i,\beta_j,\gamma_j) = \prod_{i,j}(s+\alpha_i)\,(s^2+\beta_j s+\gamma_j).$$

Параметры $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j$, определяющие величины желаемых полюсов ХП проектируемой замкнутой системы, должны иметь вещественные положительные значения. Параметры настройки регулятора в ряде случаев могут быть и отрицательными, если целью является только стабилизация. С учетом этого, и приравнивая коэффициенты при различных степенях переменной s в уравнении синтеза (1), получаем систему нелинейных уравнений и неравенств. Решение последней позволяет выяснить, существует ли в пространстве варьируемых параметров эталонного ХП и регулятора заданного порядка, такая точка или область, которая удовлетворяет построенной системе нелинейных уравнений и неравенств. При отсутствии приемлемого решения изменяется структура и/или порядок регулятора и эталона, с повторением процедуры поиска. Разрешимость задачи синтеза существенно зависит от выбора структуры ХП системы (2), то есть порядка многочлена, количества вещественных и комплексных корней, кратности задаваемых полюсов. Например, выбор ХП в форме бинома Ньютона, имеющем только одну свободную переменную, или назначение части желаемых полюсов в численном виде упрощает задачу, но зато резко ограничивает область существования решений.

Отказ от точного назначения полюсов позволяет учесть динамические и структурные особенности объекта, согласовать их со свойствами замкнутой системы, а также сгенерировать множество допустимых по постановке задачи настроек регуляторов. Символьное обобщение полиномиального метода синтеза путем параметризации алгоритмов управления вводит в рассмотрение некоторое семейство математических моделей динамики управляемых систем, с учетом множества их допустимых параметров. В результате анализа полученных соотношений можно осуществить параметрическую оптимизацию, выбрать наилучшие сочетания численных значений параметров, или диапазон значений. Важно отметить, что при этом отпадает необходимость повторения процедур синтеза алгоритмов при каждом изменении параметров объекта или желаемых свойств замкнутой системы, как это происходит при численных методах синтеза. Аналитическое представление задач также освобождает от ошибок и погрешностей, характерных для численных методов.

3. Аналитический синтез регулятора первого порядка

В простейшем случае синтез можно выполнить полностью в символьной форме. Рассмотрим процедуру аналитического синтеза регулятора первого порядка для линеаризованного объекта общего вида с универсальным задаваемым ХП.

Пусть модель управляемого объекта с достаточной степенью точности может быть линеаризована с помощью передаточной функции второго порядка с коэффициентами, закон изменения которых заранее известен. Нормированная форма его передаточной функции в общем виде выглядит следующим образом: $W_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k_0\frac{b_2s^2+b_1s+1}{a_2s^2+a_1s+1}$.

Известно [7,8], что если полиномы $A(s)$ и $B(s)$ являются взаимно простыми (не содержат общих множителей), то с помощью физически реализуемого регулятора первого порядка можно обеспечить любое желаемое размещение корней ХП замкнутой системы управления, определяющих ее динамику. Регулятор также будем искать в нормированной форме: $W_P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k_P\frac{ms+1}{ns+1}$. Тогда обобщенный ХП системы управления будет иметь третий порядок: $C(s) = s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0$. Для упрощения выкладок вместо

k_Pбудем искать общий коэффициент передачи объекта и регулятора k, формально присоединив k_0 к регулятору: $k = k_0 k_P$, после вычисления которого легко определить собственный коэффициент передачи регулятора k_P. Для определения искомых параметров настройки регулятора k, m, n в функции параметров объекта и значений коэффициентов назначенного ХП, в соответствии с уравнением синтеза (1) составим систему нелинейных алгебраических уравнений и неравенств (3):

$$\begin{cases} c_2(a_2 n + b_2 km) = a_2 + k(b_2 + b_1 m) + a_1 n \\ c_1(a_2 n + b_2 km) = a_1 + n + k(b_1 + m) \\ c_0(a_2 n + b_2 km) = k + 1 \\ c_i \in R^+; c_2 c_1 > c_0; \{k, m, n\} \in R; \\ a_2 n + b_2 km \neq 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Система (3) получена сравнением коэффициентов при одинаковых степенях s в левой и правой частях уравнения синтеза (1), а также с учетом требований к устойчивости ХП и вещественности параметров регулятора. Результат решения системы уравнений (3) с помощью, например, символьного процессора пакета Mathcad, содержит полное аналитическое описание (параметризацию) настроек линейных регуляторов первого порядка для всего семейства объектов не выше второго порядка:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_2+a_1^2+a_2^2(c_1-b_1c_0)-a_1b_1-a_2(a_1c_2-b_1c_2+b_2c_1-a_1b_2c_0+1)}{a_1-b_1-a_2(c_2+b_2c_0-b_1c_1+a_1b_1c_0)+b_2c_2+a_2^2c_0-a_1b_2c_1+a_1^2b_2c_0} \\ \dfrac{a_2+b_1^2+b_2^2(c_1-a_1c_0)-a_1b_1-b_2(b_1c_2-a_1c_2+a_2c_1-a_2b_1c_0+1)}{b_1-a_1-a_2(b_1^2c_0-b_1c_1+c_2-b_2c_0)-b_2c_2+b_2^2c_0+a_1b_2c_1-a_1b_1b_2c_0} \\ \dfrac{a_1-b_1-a_2(c_2+b_2c_0-b_1c_1+a_1b_1c_0)+b_2c_2+a_2^2c_0-a_1b_2c_1+a_1^2b_2c_0}{b_1-a_1-a_2(b_1^2c_0-b_1c_1+c_2-b_2c_0)-b_2c_2+b_2^2c_0+a_1b_2c_1-a_1b_1b_2c_0} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Полученные аналитические выражения для настроек (4) позволяют создавать достаточно универсальные регуляторы при управлении широким классом объектов невысокого порядка. Перестройка законов управления без проведения повторных процедур синтеза способна сразу изменять динамические свойства систем в зависимости от их текущего состояния, придавая им ряд дополнительных свойств, недоступных при других методах синтеза. Например, можно учесть нелинейность характеристик объекта, проявляемую в изменении коэффициентов его передаточной функции в зависимости от положения рабочей точки или от величины ошибки регулирования.

В данном случае удалось решить задачу без использования чисел, но добавление уже хотя бы одного лишнего параметра значительно удлиняет формулы, например, при раздельном использовании коэффициентов k_0 и k_P. Более сложные задачи могут привести к отсутствию решений в символьной форме или к слишком громоздким выражениям. Это заставляет использовать комбинированное, численно - аналитическое представление параметров решаемых задач.

4. Пример численно-аналитического решения задачи синтеза

Инженерные требования к разрабатываемым системам в каждом конкретном случае имеют свою специфику и разнообразие. Поэтому методы эффективного проектирования, направленные на практическую реализацию, должны быть максимально гибкими в плане выбора альтернатив. Разработчику важно иметь дополнительные проектные компромиссы для реалистичного выбора алгоритма управления. Возможности предлагаемого подхода рассмотрим на примере синтеза управления объектом с упругой связью, состоящим из двух тележек единичной массы, соединенных пружиной с неопределенным коэффициентом жесткости q. Этот простой пример с перечнем контрольных задач [9] многократно использовался для оценки эффективности различных методов робастного управления в присутствии параметрической неопределенности [10,11]. Передаточная функция объекта управления имеет вид: $W_0(s) = \frac{q}{s^4+2qs^2}$, управляющая сила прикладывается к первой тележке, а выходом является положение второй тележки. Необходимо спроектировать линейный регулятор, обеспечивающий ряд различных свойств замкнутой системы, среди которых, например, заданное время регулирования, максимальная мера робастной устойчивости по отношению к неопределенному параметру q, минимальный порядок регулятора, и другие дополнительные требования. В работе [10] построен регулятор минимального, по мнению авторов, третьего порядка, методом полуэмпирического, итеративного подбора коэффициентов ХП системы. Указанный метод привлекает своей простотой и доступностью, но трудоемок и не гарантирует существования решения, а также сходимости итерационных процедур.

Рассмотрим символьно-численный подход к решению этой задачи. Упростить процедуру можно выбором биномиальной формы назначаемого ХП системы (в данном случае седьмой степени): $C(s;\alpha) = (s+\alpha)^7$, поскольку тогда неизвестным в нем будет только один параметр α. Другим преимуществом выбора такой структуры распределения полюсов является тот факт, что система имеет максимальную степень устойчивости, когда действительные значения всех корней ХП равны между собой [8]. Выполнив синтез описанным выше методом и опуская промежуточные выкладки, запишем параметрическую передаточную функцию полученного регулятора третьего порядка в функции жесткости пружины объекта q и параметра α выбранного ХП системы:

$$W_P(s;\alpha,q) = \frac{(35\alpha^4-42q\alpha^2+4q^2)s^3+(21\alpha^5-70q\alpha^3+28q^2\alpha)s^2+7\alpha^6 s+\alpha^7}{q[s^3+7\alpha s^2+(21\alpha^2-2q)s+35\alpha^3-14q\alpha]}. \tag{5}$$

Передаточная функция (5) общего характера позволяет разработчику выбрать варианты для наделения системы нужными свойствами. Выбором свободного параметра α легко задавать требуемое быстродействие или же ограничение на управляющий вход. Максимум амплитуды управления в ходе переходного процесса в данном случае в начальный момент времени оценивается отношением коэффициентов числителя и знаменателя (5) при старших степенях s: $U_{\max} = (35\alpha^4 - 42q\alpha^2 + 4q^2)/q$. Отметим также возможность в темпе переходного процесса корректировать амплитуду управления, изменяя параметр α в зависимости от контролируемой ошибки регулирования, задавая малые значения α при больших величинах ошибки, и увеличивая α при малых. Причем при перестройках можно сохранить постоянное качество переходных процессов, в силу сохранения формы принятого при расчетах биномиального ХП, если обеспечить расположение нулей регулятора в левой половине комплексной плоскости. Например, анализ полинома числителя (4) при $q = 0{,}8$ показывает, что он остается гурвицевым, если $\alpha > 1{,}676$.

Рассмотрим теперь возможность понижения порядка регулятора, поскольку это один из непростых, но востребованных на практике вопросов теории управления [12]. Для рассматриваемого объекта в доступных примерах синтеза регуляторов их порядок был не ниже третьего. Предлагаемый подход позволяет построить регулятор второго порядка даже для весьма ограничительной биномиальной структуры назначаемого ХП в виде $C(s) = (s+\alpha)^6$. В данном случае регулятор содержит пять неизвестных параметров настройки, а шестым неизвестным назначен параметр α. После выполнения процедуры синтеза, опустив промежуточные выкладки, получим результат решения:

$$W_P(s;q) = \frac{q(-1075s^2+54\sqrt{15q}s+27q)}{25(5s^2+6\sqrt{15q}s+35q)},\ \alpha = \sqrt{0.6q}. \tag{6}$$

Из формулы (6) видно, что при заданном биномиальном ХП регулятор второго порядка будет неминимально-фазовым, а все кратные вещественные полюсы системы определяются параметром q жесткости пружины. Регулятор при настройке его коэффициентов на номинальное значение $q_0 = 0{,}8$,обычно принимаемое в данном контрольном примере, гарантирует время переходного процесса в замкнутой системе (с номинальным объектом) не более 20 с, а также широкий допуск на параметр q, обеспечивая робастную устойчивость в интервале $q \in (0{,}343; \infty)$.

Если поставить целью получение минимально-фазового регулятора второго порядка, то следует изменить структуру задаваемого ХП, допустив существование комплексных полюсов системы в соответствии с формулой (2). Назначим ХП в комбинированной, символьно-численной форме: $C(s;\beta,\gamma) = (s+0{,}2)^2(s^2+\beta s+\gamma)^2$, и выберем $q_0 = 1$. Кроме того, в уравнениях синтеза зададим нулевое значение коэффициента при s^2 в числителе передаточной функции регулятора для его дальнейшего упрощения. В итоге получим регулятор

(7) $$W_P(s) = \frac{0{,}83s+0{,}079}{s^2+1{,}075s+1{,}24},$$

который обеспечивает время переходного процесса в системе не более 30 с, и ограничение на управляющий вход $|U_{\max}| \le 0{,}5$.

По-видимому, регулятор вида (7) имеет минимальную сложность при управлении рассмотренным классом объектов, поскольку процедура синтеза регулятора более низкого, первого порядка, дает положительный результат только при $q = \infty$, когда связь между двумя тележками становится абсолютно жесткой и передаточная функция объекта вырождается до второго порядка.

Полученные результаты превосходят известные из публикаций разработки регуляторов для рассмотренной тестовой задачи, что свидетельствует в пользу предлагаемого подхода. Основанная на символьных преобразованиях стратегия проектирования и параметрической настройки регуляторов выгодно отличается от других методов невысокой вычислительной сложностью расчетов, доступностью и практичностью.

5. Заключение

Компьютерная алгебра и символьные вычисления дают возможность решать задачи управления динамическими системами в более обобщенной форме, позволяя, в частности, аналитически построить множество регуляторов, и затем выбрать наиболее приемлемый вариант. Кроме того, можно оперативно пересчитывать настройки регуляторов в темпе переходных процессов, в зависимости от текущего состояния системы, для произвольных значений выделенных параметров объектов. Формализация и алгебраическое обобщение полиномиального метода синтеза систем управления представляется перспективным направлением исследований. Получение решений задач управления в виде аналитических зависимостей хотя бы для части варьируемых параметров может стать мощным инструментом в руках разработчиков и открыть новые возможности для проектирования высокоэффективных автоматических систем. На основе применения аналитических методов полиномиальной алгебры можно получать конструктивное и замкнутое решение задач в явном виде без использования каких-либо итерационных или поисковых процедур, при невысокой вычислительной сложности расчетов, что удобно с практической точки зрения. Применение метода неопределенных коэффициентов в полиномиальных уравнениях синтеза с последующими символьными преобразованиями позволяет спроектировать наиболее рациональный в техническом отношении алгоритм управления, отвечающий необходимому комплексу требований к качественным показателям современных автоматических систем.

Список литературы

1. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры. М.: ДМК Пресс, 2009. 1264 с.
2. Symbolic methods in control system analysis and design / Ed. by N. Munro. London: IEE, 1999. 412 p.
3. Soylemez M.T., Munro N. A parametric solution to the pole assignment problem using dynamic output-feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46, No. 5. P. 711-723.
4. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 666 с.
5. Филимонов Н.Б. Методологический кризис «всепобеждающей математизации» современной теории управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Том 17, № 5. С. 291-301.
6. Захватов В.И. Развитие алгебраических методов синтеза систем управления // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. 2016. № 5-1. С. 133-134.
7. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
8. Ким Д.П. Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. М.: Физматлит, 2014. 164 с.
9. Wie B., Bernstein D.S. Benchmark problems for robust control design // Journal of Guidance, Control, and Dynamic. 1992. Vol. 15, No.5. P. 1057-1059.
10. Козлов О.С., Скворцов Л.М. Синтез простых робастных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2015. № 9. С. 102-114.
11. Честнов В.Н. Синтез робастных H_∞-регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 199-205.
12. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7-46.