УДК 519.626.2

АСИМПТОТИЧЕСКИ СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ТРАЕКТОРИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

А.И. Калинин

Белорусский государственный университет

Беларусь, 220030, Минск, Независимости пр., 4

E-mail: kalininai@bsu.by

Л.И. Лавринович

Белорусский государственный университет

Беларусь, 220030, Минск, Независимости пр., 4

E-mail: lavrinovich@bsu.by

Ключевые слова: оптимальное управление, обратная связь, линейно-квадратичная задача, малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотические приближения.

Аннотация: Рассматривается задача минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях линейной сингулярно возмущенной системы, в которой на правый конец траекторий наложены линейные ограничения. Строятся асимптотические приближения к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в этой задаче. Основное достоинство предложенных алгоритмов состоит в том, что при их применении исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами (см. обзор в [1]). Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с подвижным правым концом траекторий:

(1) $$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*,$$

(2) $$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*,$$

(3) $$H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2,$$

(4) $$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (y'M(t)y + \mu z'L(t)z + u'P(t)u)dt \to \min,$$

где μ – малый положительный параметр, t_*, t^* – заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y –n-вектор медленных переменных, z – m-вектор быстрых переменных, u – r-вектор управления, g_1, g_2 – векторы размерностей n_1, m_1 соответственно ($n_1 \leqslant n$, $m_1 \leqslant m$), H_1 и H_2 – матрицы полного ранга, $P(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица, а $M(t)$, $L(t)$ – неотрицательно определенные симметрические матрицы для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Заметим, что задача (1) - (4) является обобщением сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с фиксированным правым концом, которая рассмотрена в [2].

Предположение 1. Действительные части всех собственных значений матрицы $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$ отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Введем понятия, которые позволят уточнить то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 1. *Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2...$), если оно отклоняется по критерию качества (4) от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $y(t,\mu), z(t,\mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, системы (1) - (2) удовлетворяет терминальным ограничениям (3) с точностью того же порядка малости.*

Определение 2. *Вектор-функцию $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (y_*, z_*, t_*), $(t_* < t^*)$, имеет место $u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче* (1) - (4).

Целью исследования рассмотренной задачи является построение асимптотически субоптимальных управлений и обратных связей. Суть применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра множителей Лагранжа, соответствующих в силу принципа максимума [3] оптимальному управлению. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух базовых невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача:

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, y(t_*) = y_*, H_1 y(t^*) = g_1,$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (y'M(t)y + u'P(t)u)dt \to \min,$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$.

Предположение 3. Динамическая система в первой базовой задаче является управляемой на отрезке $[\tau, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0$ при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ (см. [4]).

Заметим, что для стационарной динамической системы это предположение эквивалентно требованию [4]

$$rank(H_1B_0, H_1A_0B_0, ..., H_1A_0^{n-1}B_0) = n_1.$$

Вторая базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u,$$

$$H_2z(0) = H_2A_4^{-1}(t^*)(A_3(t^*)y^0(t^*) + B_2(t^*)u^0(t^*)) + g_2,$$

$$z(-\infty) = 0, J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u'(s)P(t^*)u(s)ds \to \min,$$

где $u^0(t), y^0(t), t \in [t_*, t^*]$, – соответственно оптимальные управление и траектория в первой базовой задаче.

Предположение 4. Выполнен критерий относительной управляемости на подпространство:

$$rank(H_2B_2(t^*), H_2A_4(t^*)B_2(t^*), ..., H_2A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)) = m_1.$$

Сделанные предположения гарантируют существование и единственность оптимальных управлений в базовых задачах, которые являются нормальными экстремалями. При этих предположениях разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче. Вычислительная процедура алгоритма помимо решения базовых задач включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений и нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Впрочем, асимптотическое субоптимальное управление нулевого порядка может быть построено непосредственно после решения базовых задач, поскольку оно представимо в виде

$$u^{(0)}(t,\mu) = u^0(t) + u^*((t - t^*)/\mu), t \in [t_*, t^*],$$

где $u^*(s)$, $s \leqslant 0$, – оптимальное управление во второй базовой задаче.

Наряду с асимптитическими приближениями к программному оптимальному управлению построена асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка, которая линейна по медленным переменным и не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных.

Полученные результаты апробированы на задаче переориентации динамически симметричного твердого тела, вращающегося вокруг оси симметрии.

Список литературы

1. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3-51.
2. Калинин А.И., Лавринович Л.И. Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 194-206.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.