УДК 519.71

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Л.М. Любчик
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
Украина, 61002, Харьков, ул. Кирпичева, 2.
E-mail: lyubchyk@kpi.kharkiv.edu

Ключевые слова: квазиинвариантность, компенсация возмущений, локально-оптимальное управление, наблюдатели, обратные системы, развязывающие компенсаторы.

Аннотация: Рассматривается задача управления выходом линейной многомерной системы при наличии неизвестных постоянно действующих возмущений, недоступных непосредственному измерению. Закон управления синтезируется на основе принципа локально-оптимального управления с использованием оценок возмущений, формируемых с помощью обратной динамической модели объекта управления. Синтез устойчивой обратной модели с заданными динамическими характеристиками осуществляется на основе теории наблюдателей для систем с неизвестным входом. Устанавливаются условия существования развязывающего динамического компенсатора, не использующего промежуточные оценки возмущений. Предлагается структура реализуемого компенсатора, включающего внутренний динамический фильтр с малыми параметрами.

1. Введение

Проблема инвариантности, история которой насчитывает многие десятилетия, до сих пор привлекает внимание исследователей [1]. Известные ограничения возможности реализации идеального инвариантного регулятора инициировали разработку методов квазиинвариантного управления [2], в том числе разнообразных методов подавления возмущений. Методы снижения влияния возмущений используют априорную информацию о классах возмущений, заданную в статистической или нестатистической форме. Решение задачи управления ищется в классе структур управления по отклонению и формализуется в виде некоторой оптимизационной задачи [3].

Значительного повышения степени подавления возмущений можно достичь путем использования в законе управления текущей информации о фактических реализациях возмущений, полученной путем их непосредственного или косвенного измерения. Указанный подход основан на использовании структур регуляторов, включающих в себя модели объектов управления и возмущающих воздействий, и известен под названием метода внутренних моделей [4]. Соответствующие модели используются как для косвенного измерения возмущений, так и для их прогнозирования и компенсации с целью обеспечения селективной инвариантности [5] по отношению к определенному классу возмущений. Развитие этого подхода привело к концепции наблюдателей возмущений

[6], однако его реализация требует задания модели возмущения, что на практике во многих случаях оказывается затруднительным.

Дальнейшим развитием структурного подхода является метод обратных динамических моделей [7,8], позволяющий оценивать и компенсировать возмущения произвольного вида. При этом ключевой являлась идея синтеза обратных моделей с заданными динамическими свойствами на основе теории инвариантных наблюдателей для систем с неизвестным входом (UIO – unknown input observer) [9].

В настоящей работе предлагается методика синтеза развязывающего динамического компенсатора, обеспечивающего подавление неизвестных возмущений при слежении за задающим воздействием. Получено условие существования развязывающего компенсатора, которое можно трактовать как алгебраический критерий выполнения условий принципа двухканальности Б.Н. Петрова для многомерных систем.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача управления выходом линейной многомерной системы

(1) $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Nf(t), \quad y_c(t) = Cx(t),\ y_m(t) = Mx(t),$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ – вектор управлений, $f(t) \in \mathbf{R}^q$ – неизвестное и недоступное измерению возмущение, $y_c(t) \in \mathbf{R}^r$, $y_m(t) \in \mathbf{R}^p$ – выходные управляемые и измеряемые переменные соответственно.

Матрицы $S_{CB}(\alpha_1) = CA^{\alpha_1 - 1}B,\ S_{MN}(\alpha_2) = MA^{\alpha_2 - 1}N$ носят название параметров Маркова, где α_1, α_2 – относительные порядки системы (1). Будем предполагать, что выполняются условия обратимости $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} S_{CB}(\alpha_1) = r = m,\ \operatorname{rank} N \le \operatorname{rank} S_{MN}(\alpha_2) = p$. Для простоты примем, что $\operatorname{rank} S_{CB} = m,\ \operatorname{rank} S_{MN} = m,$ где $S_{CB} = S_{CB}(1),\ S_{MN} = S_{MN}(1)$.

Задача управления выходом системы (1) состоит в нахождении закона управления $u(y(t), y^*(t))$ обеспечивающего выполнение цели управления $\overline{\lim} \| e_c(t) \|^2 \le \varepsilon^*, \quad t \to \infty,$ где $e_c(t) = y^*(t) - y_c(t)$ – ошибка управления, $y^*(t)$ – задающее воздействие, формируемое эталонной моделью $\dot{y}^*(t) = A^* \cdot y^*(t) + y_{ref}(t)$, ε^* – некоторая константа.

3. Синтез динамических наблюдателей возмущений

Получим оценку неизвестного возмущения $f(t)$ с помощью обратной динамической модели. Динамическую систему с вектором состояния $\overline{x}(t) \in \mathrm{R}^{n-q}$

(2) $$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}(t) &= A^I \overline{x}(t) + B^I u(t) + B_1^I y(t) + B_2^I \dot{y}(t), \\ \hat{f}(t) &= C^I \overline{x}_k + D^I u(t) + D_1^I y(t) + D_2^I \dot{y}(t) \end{aligned}$$

будем называть *обратной динамической моделью* пониженного порядка системы (1), если $\left\| \overline{x}(t) - Rx(t) \right\|^2 \to 0$, $\left\| \hat{f}(t) - f(t) \right\|^2 \to 0$ при $t \to \infty$, где $R_{n-q \times n}$ – матрица агрегирования переменных состояния. Тогда $\hat{f}(t)$ может рассматриваться как динамическая оценка неизвестного возмущения $f(t)$, полученная с помощью обратной модели (2).

Получим параметризованную минимальную реализацию обратной системы с использованием инвариантного наблюдателя состояния пониженного порядка. Введем агрегированные переменные $z(t)=Rx(t)\in\mathbf{R}^{n-p}$, где R матрица агрегирования, такая, что $\operatorname{rank}\left(M^{\mathrm{T}} \mid R^{\mathrm{T}}\right)=n$. Будем искать оценку состояния в виде $\hat{x}(t)=P\cdot y_m(t)+Q\cdot\bar{x}(t)$, где матрицы $P\in\mathbf{R}^{n\times p}, Q\in\mathbf{R}^{n\times n-p}$ удовлетворяют условиям

$$MP=I_p,\ RQ=I_{n-p},\ \ PM+QR=I_n, MQ=0_{p,n-p},\ \ RP=0_{n-p,p}.$$

Получим оценку $\bar{x}(t)$ агрегированного вектора $z(t)$ с помощью UIO наблюдателя пониженного порядка [9]:

(3) $$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{F}\bar{x}(t)+\bar{G}_1 y_m(t)+H\dot{y}_m(t)+\bar{G}_0 u(t).$$

Параметры наблюдателя (3) находятся из условий инвариантности ошибки оценивания к неизвестному входу

(4) $$\left(R-\bar{H}M\right)A-\bar{F}\left(R-\bar{H}M\right)=\bar{G}M,\ \ RN-\bar{H}MN=0,\ \bar{G}_0-RB=0,\ \ \bar{G}_1=\bar{G}-\bar{F}\bar{H}.$$

Решение системы матричных алгебраических уравнений (4) имеет следующий вид:

$$\bar{F}=R\Pi_N AQ,\ \ \bar{G}_0=RB,\ \bar{G}_1=R\Pi_N AP,\ \bar{H}=RNS_{MN}^{+},\ \Pi_N=I_n-BS_{MN}^{+}M\ ,$$

где «+» – знак псевдообращения по Муру-Пенроузу.

Выберем оценку возмущения в виде $\hat{f}(t)=N^{+}\left(\dot{\hat{x}}(t)-A\hat{x}(t)-Bu(t)\right)$, тогда уравнения наблюдателя состояния и возмущения минимального порядка будут представлены в виде синтезированной обратной модели (2) системы (1).

(5) $$\begin{aligned}&\dot{\bar{x}}(t)=R\Pi_N AQ\cdot\bar{x}(t)+R\Pi_N AP\cdot y_m(t)+RNS_{MN}^{+}\cdot\dot{y}_m(t)+R\Pi_N B\cdot u(t),\\&\hat{x}(t)=P\cdot y_m(t)+Q\cdot\bar{x}(t),\\&\hat{f}(t)=\bar{C}_N[\dot{y}_m(t)-MAQ\cdot\bar{x}(t)-MAP\cdot y_m(t)-S_{MB}u(t)],\end{aligned}$$

где матрицы $\Pi_{\mathrm{N}}=I_n-NS_{MN}^{+}M,\ \Omega_N=I_p-S_{MN}S_{MN}^{+},\ C_N=S_{MN}^{+}+N^{+}P\Omega_N$.

Из (1), (5) следует, что динамика векторов ошибок оценивания $e_x(t)=x(t)-\hat{x}(t)$, $e_f(t)=f(t)-\hat{f}(t)$ описывается уравнениями $\dot{\bar{e}}_x(t)=\bar{F}\left(R\right)\cdot\bar{e}_x(t)$, $e_x(t)=Q\cdot\bar{e}_x(t)$, $e_f(t)=-C_N MAQ\cdot\bar{e}_x(t)$ и определяется выбором матрицы R.

Конкретизируем выбор матриц P, Q, представив их в блочной форме $\left(P \mid Q\right)=\begin{pmatrix}P_1 & Q_1\\ P_2 & Q_2\end{pmatrix}$, $P_1=I_p$, $Q_1=0_{p,n-p}$, тогда $R=Q_2^{-1}\left(-P_2 \mid I_{n-p}\right)$, где P_1, Q_2 – произвольные матрицы, при этом принято, что $\det\ Q_2\neq 0$.

Воспользовавшись соответствующей заменой базиса, представим матрицы системы (1) в блочной форме $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}I_p & 0_{n-p,p}\end{pmatrix}$, $N=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}p\\ n-p\end{array}$. Тогда матрица динамики наблюдателя приобретает следующий вид: $\bar{F}\left(R\right)=Q_2^{-1}\left(\bar{A}_{22}-P_2\bar{A}_{12}\right)Q_2$, где $\bar{A}_{12}=\Omega_{N_{11}}A_{12}$, $\tilde{A}_{22}=A_{22}-N_2N_1^{+}A_{12}$, $\Omega_{N_1}=I_q-N_1N_1^{+}$.

Таким образом, матрица Q_2 определяет преобразование подобия и не изменяет спектр матрицы динамики наблюдателя $\bar{F}_1\left(R_1\right)$, определяемый выбором матрицы $P_2\in\mathbf{R}^{n-p\times p}$ настроечных параметров. Она, в свою очередь, может выбираться методами модального управления на основе процедуры размещения полюсов. Очевидно, что эта задача разрешима при выполнении условий наблюдаемости пары матриц $(\bar{A}_{22},\ \bar{A}_{12})$.

4. Синтез развязывающих компенсаторов возмущений

Управление выходом системы (1) находится как функция задающего воздействия и оценки возмущения:

(6) $$u^*(t) = S_{CB}^{-1} \cdot [y_{ref}(t) + C_A \hat{x}(t) - S_{CN} \hat{f}(t)], \quad C_A = A^* C - CA.$$

Если выполняются условия, которые будем называть условиями структурной невырожденности системы (1)

(7) $$\operatorname{rank} \bar{S} = m + q, \; \bar{S} = \begin{pmatrix} I_m & S_{CB}^{-1} S_{CN} \\ C_N S_{MB} & I_q \end{pmatrix},$$

или, что эквивалентно, $\det \Phi \neq 0$, $\Phi = I_q - C_N S_{MB} S_{CB}^{-1} S_{CN}$, оценка возмущения может быть исключена из уравнений наблюдателя (5) и регулятора выхода (6), которые, в свою очередь, могут быть разрешены относительно управления $u^*(t)$, что позволяет получить уравнения развязывающего компенсатора, устанавливающего динамическую связь управления с задающим воздействием $y_{ref}(t)$ и измеряемыми переменными $y_m(t)$.

В этом случае уравнение замкнутой системы приобретает вид:

$$\dot{x}(t) = A^0 x(t) + \Pi_B N f(t) + H_B y_{ref}(t) + L e_x(t),$$

$$A^0 = A + H_B C_A = \Pi_B A + H_B A^* C,$$

Учитывая, что $CA^0 = A^* C$, получим, что цель управления достигается с $\varepsilon^* = 0$ если замкнутая система (8) устойчива.

Если система (1) неминимально-фазовая по управлению, то можно показать, что матрица динамики A^0 неустойчива, и возникает задача стабилизации замкнутой системы. Обратная связь по состоянию $u(t) = u^*(t) - K\hat{x}(t)$ не изменяет спектр A^0, поскольку $\Pi_B(A + BK) = 0$. В этом случае воспользуемся методом локально-оптимального управления [10], в соответствии с которым управление находится из условия минимизации одношагового регуляризованного критерия оптимальности

$$\left\| y_{ref}(t) + C_A A \hat{x}(t) - S_{CB} u(t) - S_{CN} \hat{f}(t) \right\|^2 + \beta \| u(t) \|^2 \to \min_u$$

где β весовой коэффициент. Соответствующий закон управления имеет вид:

(8) $$u_\beta^*(t) = D_1(\beta) \left(y_{ref}(t) + C_A A \hat{x}(t) - S_{CN} \hat{f}(t) \right), \quad D_1(\beta) = \left(\beta I_m + S_{CB}^{\mathrm{T}} S_{CB} \right)^{-1} S_{CB}^{\mathrm{T}}.$$

Для управления (8) уравнение замкнутой системы приобретает вид:

(9) $$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A_0(\beta) \cdot x(t) + BD(\beta) \cdot y_{ref}(t) + \Pi_B(\beta) N \cdot f(\beta) + L_\beta \cdot e_x(t), \\ A_0(\beta) = A + BD(\beta) C_A = \Pi_B(\beta) A + BD(\beta) A^* C, \quad \Pi_B(\beta) = I_n - BD(\beta) C. \end{gathered}$$

Введем стабилизирующее управление $u(t) = u^*(t) - K\hat{x}(t)$, $A_0(\beta, K) = A_0(\beta) - B_\beta K$, $B_\beta = \beta B \left(\beta I_m + S_{CB}^{\mathrm{T}} S_{CB} \right)^{-1}$. Система (9) стабилизируема, если пара матриц $\left(A_0(\beta), B_\beta \right)$ управляема. Ошибка управления описывается уравнением $\dot{e}_c(t) = A^* e_c(t) - \beta S_{CB} \left(\beta I_m + S_{CB}^{\mathrm{T}} S_{CB} \right)^{-1} u^*(t)$ и цель управления достигается с $\varepsilon^*(\beta)$.

На практике условия (7) зачастую не выполняются. В этом случае реализуемый закон управления может быть получен путем динамического преобразования оценки возмущения $\hat{f}(t)$ с помощью включенного в структуру развязывающего компенсатора дополнительного «быстрого» фильтра с малыми постоянными времени

$$u^*(t) = S_{CB}^{-1} \cdot [y_{ref}(t) + C_A \hat{x}(t) - S_{CN} \tilde{f}(t)], \quad \varepsilon \dot{\tilde{f}}(t) = -\tilde{f}(t) + (1-\mu) \cdot \hat{f}(t), \tag{10}$$

где $0 < \varepsilon << 1$, $0 < \mu << 1$ – малые параметры внутреннего фильтра.

Из (5), (10) следуют уравнения развязывающего компенсатора с фильтром

$$\begin{gathered} \varepsilon \dot{\tilde{u}}(t) = -\mu \tilde{u}(t) + (1-\mu) \cdot [\varphi_1(t) + S_{CB}^{-1} S_{CN} \varphi_2(t)], \quad u^*(t) = \tilde{u}(t) + \varphi_1(t), \\ \varphi_1(t) = S_{CB}^{-1} \cdot [y_{ref}(t) + C_A \hat{x}(t)], \quad \varphi_2(t) = C_N \cdot [\dot{y}_m(t) - MAQ \cdot \overline{x}(t) - MAP \cdot y_m(t)]. \end{gathered} \tag{11}$$

В этом случае замкнутая управлением (11) система является разнотемповой [11], в которой медленные движения при $\varepsilon = 0$ совпадают с процессами в системе с идеальным развязывающим компенсатором, а быстрые движения описываются уравнением

$$E(\varepsilon) \cdot \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}^0 \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}^0 \cdot f(t),$$

где $E(\varepsilon) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \varepsilon I_q \end{pmatrix}$, $\tilde{A}^0 = \begin{pmatrix} A^0 & -H_B S_{CN} \\ 0_{q,n} & -I_q \end{pmatrix}$, $\tilde{B}^0 = \begin{pmatrix} N \\ (1-\mu) I_q \end{pmatrix}$,

устойчивость которого определяет возможность компенсации возмущений для структурно вырожденных систем.

5. Заключение

Предложенный подход позволяет не только синтезировать законы управления, позволяющие обеспечить эффективное подавление недоступных непосредственному измерению возмущений, но и оценить потенциально достижимую точность управления. Так для минимально-фазовых по управлению и структурно невырожденных систем степень приближения к абсолютной инвариантности будет определяться только точностью дифференцирования измеряемых переменных и точностью задания модели объекта управления. Для неминимально-фазовых систем достижимая степень подавления возмущений имеет нижнюю границу, определяемую параметрами системы.

Список литературы

1. Труды научного семинара «70 лет теории инвариантности». Москва, 2 июня 2008 г. / Под ред. С.Н. Васильева. М.: ЛКИ, 2008. 256 с.
2. Неймарк Ю.И. Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 48-56.
3. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. № 5. С. 72-90.
4. Tsypkin Ya. Z., Holmberg U. Robust stochastic control and internal model control // Int. Journal of Control. 1995. Vol. 61, No 4. P. 809-822.
5. Цыпкин Я.З. Адаптивно инвариантные дискретные системы управления // Автоматика и телемеханика. 1991. № 5. С. 96-124.
6. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
7. Lyubchyk L.M. Inverse model control and sub-invariance in linear discrete multivariable systems // Proc. of 3-rd European Control Conference. Roma, Italy.1995. Vol. 4, Part 2. P. 3651-3659.
8. Lyubchyk L.M. Disturbance rejection in linear discrete multivariable systems: inverse model approach // IFAC Proceedings Volumes. 2011. Vol. 44, No. 1. P. 7921-7926.
9. Hou M., Muller P.C. Design of observers for linear systems wits unknown inputs // IEEE Trans. on Automatic Control. 1992. Vol. 37, No. 6. P. 871-875.
10. Kelmans G.K., Poznyak A.S., Chernitser A.V. Adaptive locally optimal control // Int. Journal System Science. 1981. Vol. 12, No. 2. P. 235-254.
11. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука. 1985. 697 с.