

# СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ПРОЕКТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

**В.А. Уткин**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: [vicutkin@ipu.ru](mailto:vicutkin@ipu.ru)

**А.В. Уткин**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: [utkin-av@rambler.ru](mailto:utkin-av@rambler.ru)

**Ключевые слова:** инвариантность, ограничения на фазовые переменные и управления, декомпозиция, кусочно-линейные функции, метод расширения пространства состояний.

**Аннотация:** К одной из малоизученных задач теории управления относится проблема обеспечения инвариантности выходных переменных объекта управления по отношению к несогласованным (действующим не по каналам управлений) возмущениям с учетом ограничений на управления и фазовые переменные. Предложены два подхода к решению этой задачи: 1) синтез статической обратной связи в рамках блочного подхода с использованием кусочно-линейных обратных связей; 2) синтез динамической обратной связи в рамках метода расширения пространства состояний.

## 1. Введение

Рассматривается задача обеспечения инвариантности выходных переменных линейного объекта управления по отношению к внешним, несогласованным возмущениям с учетом ограничений на управление и фазовые переменные. Возмущения полагаются неизвестными, ограниченными по модулю функциями.

В теории инвариантности хорошо изучены вопросы синтеза систем при расширении пространства состояний за счет автономных динамических моделей с известными параметрами и неизвестными начальными условиями, имитирующих внешние воздействия [1-3], в которых инвариантность выходных переменных обеспечивается в асимптотике. Классическим способом подавления произвольных, ограниченных по модулю возмущений являются скользящие режимы [4] (точная компенсация возмущений за конечное время) и системы с глубокими обратными связями (стабилизация выходных переменных с заданной точностью). В первом случае инвариантность обеспечивается только к согласованным возмущениям (действующим по каналам управлений). Во втором случае в рамках блочного подхода разработаны методы инвариантных систем общего вида [5-8]. В последние годы развивается важное для практики направление, связанное с формированием локальных связей в виде нелинейных ограниченных  $S$ -образных функций, что позволяет учитывать на стадии синтеза ограничения на управления и фазовые координаты [9-11]. Особо выделим методы синтеза наблюдателей состояния с  $S$ -образными корректирующими воздействиями [12-14], позволяющие, во-

первых, ограничить всплески вначале переходных процессов, во-вторых, получить оценки внешних возмущений без ввода их динамической модели и использовать их для компенсации возмущений, что является практически реализуемой альтернативой обеспечения инвариантности по отношению к системам с глубокими обратными связями.

В данной работе предложены оригинальные методы синтеза инвариантных систем с учетом проектных ограничений. В разделе 2 в рамках блочного подхода инвариантность выходной переменной по отношению к несогласованным возмущениям обеспечивается с помощью кусочно-линейных локальных связей. Формализованы неравенства, на основе которых делается вывод о разрешимости задачи с учетом имеющихся ограничений. В разделе 3 используется метод расширения пространства состояний за счет низкочастотных фильтров и организации скользящих режимов в виртуальном пространстве смешанных переменных. Основные идеи поясняются на примерах линейных возмущенных систем второго и третьего порядка соответственно и без ограничения общности могут быть распространены на многомерные многосвязные системы.

## 2. Блочный подход с кусочно-линейными обратными связями

Рассматривается линейная система второго порядка при действии внешних неконтролируемых возмущений вида

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2 + \eta_1, \quad \dot{x}_2 = u + \eta_2,$$

где  $(x_1, x_2)^T \in R^2$  – вектор состояния, доступный для измерения,  $x_1$  – выходная, регулируемая переменная,  $u \in R$  – управление,  $(\eta_1, \eta_2)^T$  – вектор внешних возмущений, возмущение  $\eta_1(t)$  является не согласованным,  $\eta_2(t)$  – согласованным. На переменные системы (1) наложены ограничения

$$(2) \quad |x_i| \leq X_i = const, |\eta_i| \leq N_i = const, i = 1, 2, |u| \leq U = const, X_2 > N_1, U > N_2.$$

Ставится задача синтеза статической обратной связи, обеспечивающей инвариантность выходной переменной по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью  $|x_1(t)| \leq \Delta_1 \quad \forall t > T_1 > 0$ , с выполнением условий (2). Ниже представлено решение в рамках блочного подхода с использованием кусочно-линейных обратных связей.

С помощью невырожденной замены переменных

$$\bar{x}_2 = x_2 + M_1 \text{sat}(s_1), \quad s_1 = k_1 x_1, \quad k_1 = const > 0, \quad M_1 \text{sat}(s_1) = \min(M_1, |s_1|) \text{sign}(s_1)$$

представим систему (1) в виде

$$(3) \quad \dot{x}_1 = -M_1 \text{sat}(s_1) + \bar{x}_2 + \eta_1, \quad \dot{\bar{x}}_2 = u + \eta_2 + \frac{d}{dt} M_1 \text{sat}(s_1),$$

$$\frac{d}{dt} M_1 \text{sat}(s_1) = \begin{cases} 0, & |s_1| \geq M_1, \\ \dot{s}_1, & |s_1| < M_1, \end{cases} \quad \dot{s}_1 = k_1(x_2 + \eta_1) \Rightarrow |\dot{s}_1| < k_1(X_2 + N_1)$$

и выберем обратную связь в виде

$$(4) \quad u = -M_2 \text{sat}(s_2), \quad s_2 = k_2 \bar{x}_2, \quad k_2 = const > 0.$$

В замкнутой системе (3)–(4) при  $M_2 > \eta_2 + \frac{d}{dt} M_1 \text{sat}(s_1) \geq N_2 + k_1(X_2 + N_1)$  обеспечивается попадание в линейную зону  $|s_2| < M_2$ , где второе уравнение системы (3) имеет вид  $\dot{\bar{x}}_2 = -k_2 \bar{x}_2 + \eta_2 + \frac{d}{dt} M_1 \text{sat}(s_1)$ , следовательно,  $k_2 |\bar{x}_2| \leq N_2 + k_1(X_2 + N_1)$ . В свою очередь выбор  $M_1 > \frac{N_2 + k_1(X_2 + N_1)}{k_2} + N_1$  обеспечивает попадание в линейную зону

$|s_1| < M_1$ , где первое уравнение системы (3) имеет вид  $\dot{x}_1 = -k_1x_1 + \eta_1 + \bar{x}_2$  и, следовательно, обеспечивается соотношение  $k_1|x_1| \leq \frac{N_2 + k_1(X_2 + N_1)}{k_2} + N_1$ .

Формализуем цель управления:

$$(5) \quad |x_1| \leq \frac{1}{k_1} \left( \frac{N_2 + k_1(X_2 + N_1)}{k_2} + N_1 \right) = \Delta_1.$$

Эта задача имеет решение, если система неравенств

$$\begin{cases} N_1 < k_1\Delta_1, \\ N_2 + k_1(X_2 + N_1) < U, \end{cases}$$

где первое гарантирует заданную точность стабилизации выходной переменной  $|x_1| \leq \Delta_1$ , а второе – выполнение ограничения на управления  $|u| \leq U$ , совместна относительно  $k_1$ . Коэффициент  $k_2$  при фиксированном коэффициенте  $k_1$  определяется как максимальное значение, необходимое для выполнения требования на ограничение компоненты вектора состояния  $|x_2| \leq X_2$ :  $X_2 = \frac{N_2 + k_1(X_2 + N_1)}{k_2} + N_1$ , а также заданную точность стабилизации выходной переменной (5).

### 3. Метод расширения пространства состояния

Теперь рассмотрим линейную систему третьего порядка при действии внешних неконтролируемых возмущений вида

$$(6) \quad \dot{x}_1 = x_2 + \eta_1, \quad \dot{x}_2 = x_3 + \eta_2, \quad \dot{x}_3 = u + \eta_3,$$

где  $(x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$  – вектор состояния, доступный для измерения,  $x_1$  – выходная переменная,  $u \in R$  – управление,  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$  – вектор внешних возмущений, возмущения  $\eta_{1,2}(t)$  являются не согласованным,  $\eta_3(t)$  – согласованным. На переменные системы (6) наложены ограничения, аналогичные (2), а также необходимые условия (7)

$$(7) \quad \begin{aligned} |x_i| \leq X_i = \text{const}, |\eta_i| \leq N_i = \text{const}, i = 1, 2, 3, |u| \leq U = \text{const}, \\ X_2 > N_1, X_3 > N_2, U > N_3. \end{aligned}$$

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей инвариантность выходной переменной по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью  $|x_1(t)| \leq \Delta_1 \quad \forall t > T_1 > 0$ , с выполнением условий (6). Ниже представлено решение в рамках метода расширения пространства состояний, а именно, система (6) дополняется подсистемой фильтров с устойчивыми собственными движениями

$$(8) \quad \dot{z}_1 = -a_1z_1 - M_1 \text{sign}s_1, \quad \dot{z}_2 = -a_2z_2 + a_1z_1 - M_2 \text{sign}s_2, \quad \dot{z}_3 = -a_3z_3 + a_2z_2 - M_3 \text{sign}s_3,$$

где  $a_i = \text{const} > 0$ ,  $M_i = \text{const} > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $s_i$  – переменные, определяющие поверхности переключения разрывных виртуальных управлений, определим ниже. Справедливы соотношения

$$(9) \quad \begin{aligned} |a_1z_1| < M_1 \Rightarrow |z_1| < \frac{M_1}{a_1}, \quad |a_2z_2| < M_2 + 2a_1M_1 \Rightarrow |z_2| < \frac{M_2 + 2a_1M_1}{a_2}, \\ |a_3z_3| < M_3 + 2a_2M_2 \Rightarrow |z_3| < \frac{M_3 + 2a_2M_2}{a_3}. \end{aligned}$$

Выберем плоскости скольжения в следующем виде

$$(10) \quad s_1 = x_1 + z_1, \quad s_2 = x_2 + z_2 - a_1 z_1, \quad s_3 = x_3 + z_3 - a_2 z_2$$

и запишем систему дифференциальных уравнений с учетом выбора  $u = a_3 z_3$ :

$$(11) \quad \dot{s}_1 = s_2 - z_2 + \eta_1 - M_1 \text{sign} s_1, \quad \dot{s}_2 = s_3 - z_3 + \eta_2 - M_2 \text{sign} s_2, \quad \dot{s}_3 = \eta_3 - M_3 \text{sign} s_3.$$

При возникновении скользящих режимов по всем плоскостям  $s_i = 0, i = 1, 2, 3$  с учетом (9) будут выполнены следующие ограничения:

$$(12) \quad \begin{aligned} s_1 = x_1 + z_1 = 0 &\Rightarrow |x_1| = |z_1| \leq \frac{M_1}{a_1} = \Delta_1, \\ s_2 = x_2 + z_2 - a_1 z_1 = 0 &\Rightarrow |x_2| = |-z_2 + a_1 z_1| \leq \frac{(M_2 + 2a_1 M_1)}{a_2} + M_1, \\ s_3 = x_3 + z_3 - a_2 z_2 = 0 &\Rightarrow |x_3| = |-z_3 + a_2 z_2| \leq \frac{(M_3 + 2a_2 M_2)}{a_3} + (M_2 + 2a_1 M_1), \\ u = a_3 z_3 &\Rightarrow |u| \leq M_3 + 2a_2 M_2. \end{aligned}$$

Полученные оценки (12) будут практически значимыми, если они удовлетворяют заданным ограничениям. Здесь можно выделить две задачи: анализа и синтеза. При анализе следует выяснить, можно ли при заданной точности стабилизации выходной переменной и оценкам худших допустимых возмущений выполнить проектные ограничения в процессе управления. При синтезе по заданной точности стабилизации выходной переменной и ограничениям на возмущения определить необходимые для решения поставленной задачи системные ограничения.

На этапе анализа рассмотрим процедуру выбора параметров фильтров (8) для последовательной, снизу вверх организации скользящих режимов в виртуальной системе (11) по плоскостям  $s_3 = 0 \rightarrow s_2 = 0 \rightarrow s_1 = 0$ . С учетом достаточных условий возникновения скользящих режимов  $s_i \dot{s}_i < 0, i = 1, 2, 3, s_i \neq 0$  [4] и в силу (12) имеем:

$$(13) \quad \begin{aligned} M_3 &> N_3, \\ M_2 &> |-z_3 + \eta_2| \leq \frac{M_3 + 2a_2 M_2}{a_3} + N_2 \Rightarrow M_2 > \frac{a_3 N_2 + M_3}{a_3 - 2a_2}, \\ M_1 &> |-z_2 + \eta_1| \leq \frac{M_2 + 2a_1 M_1}{a_2} + N_1 \Rightarrow M_1 > \frac{a_2 N_1 + M_2}{a_2 - 2a_1}. \end{aligned}$$

Учтем ограничение на управление  $u = a_3 z_3 \Rightarrow |u| \leq (M_3^* + 2a_2 M_2) = U$ , где  $M_3^*$  фиксируется из условия  $M_3^* > N_3$ , и заданную точность стабилизации выходной переменной:

$$s_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -z_1 \Rightarrow |x_1| \leq \frac{M_1}{a_1} = \Delta_1 \Rightarrow M_1 = a_1 \Delta_1.$$

Получим систему неравенств относительно пяти неизвестных  $a_1, a_2, a_3, M_1, M_2$  вида

$$(14) \quad (M_3^* + 2a_2 M_2) = U, \quad M_2 > \frac{U}{a_3} + N_2, \quad M_1 > \frac{1}{a_2} \left( \frac{U}{a_3} + N_2 + 2a_1^2 \Delta_1 \right) + N_1.$$

Дополним систему (14) ограничениями на фазовые переменные с учетом (12):

$$(15) \quad \begin{aligned} |x_3| &\leq \frac{U}{a_3} + (M_2 + 2a_1^2 \Delta_1) \leq X_3, \\ |x_2| &\leq \frac{(M_2 + 2a_1 M_1)}{a_2} + M_1 = \frac{(M_2 + 2a_1^2 \Delta_1)}{a_2} + a_1 \Delta_1 \leq X_2. \end{aligned}$$

Итак, имеем систему из пяти неравенств относительно пяти неизвестных (14)–(15), решение которой в общем случае многовариантно. В частности из (13) следует, что при фиксированном  $a_1$  при увеличении коэффициентов  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $(a_3/a_2) \rightarrow \infty$  амплитуды разрывных управлений будут определяться одноименными возмущениями  $M_i > N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , т.е. необходимые условия (7) являются и достаточными.

## 4. Заключение

Кажется несколько удивительным, что в настоящее время мало изученной оказывается задача обеспечения инвариантности к несогласованным возмущениям даже для таких простых систем, как (1), (6). Первое, что напрашивается (привести исходную систему к каноническому виду) неприемлемо, поскольку в общем случае не предполагается дифференцируемость внешних возмущений. Использование блочного подхода с линейными обратными связями не позволяет учитывать естественные ограничения на фазовые переменные и управления. Данная работа является развитием направления исследований в ИПУ РАН по синтезу инвариантных систем на основе  $S$ -образных локальных связей в рамках блочного подхода.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00846А).

## Список литературы

1. Уонем У.М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980, 376 с.
2. Уткин В. А., Уткин В. И. Метод разделения движений в задачах инвариантности // Автоматика и телемеханика. 1983. № 12. С. 39-48.
3. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб: Наука, 2003. 282 с.
4. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970, 592 с.
5. Уткин В.А. Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 11. С. 73-94.
6. Уткин А.В. Метод расширения пространства состояния в задаче синтеза автономного управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 6. С. 81-98.
7. Ахобадзе А.Г., Краснова С.А. Задача слежения в линейных многомерных системах при наличии внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 6. С. 21-47.
8. Ахобадзе А.Г., Краснова С.А. Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости // Управление большими системами. 2009. Вып. 24. С. 34-80.
9. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В., Нгуен Тхань Тиен. Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. 2008. № 1. С. 10-18.
10. Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016. № 4. С. 10-21.
11. Krasnova S.A., Kochetkov S.A. and Utkin V.A. Block design of tracking system under unmatched disturbances via sigmoidal feedbacks // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1798 (020078). No. 1.
12. Краснова С.А., Мысик Н.С. Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 106-128.
13. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика. 2017. № 12. С. 26-53.
14. Краснов Д.В., Уткин А.В. Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. 2017. Вып. 69. С. 29-49.