УДК 517.977.1

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ АФФИННЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ ЗАМЕН НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.А. Фетисов
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-ая Бауманская ул., 5, стр. 1
E-mail: dfetisov@yandex.ru

Ключевые слова: нелинейная система, линеаризация, замена независимой переменной.

Аннотация: Рассматривается задача преобразования нелинейной системы с управлением в линейную управляемую систему. Для решения поставленной задачи используется введенное ранее для аффинных систем понятие A-орбитальной линеаризуемости. Доказываются условия A-орбитальной линеаризуемости аффинных систем с одним управлением. Разрабатывается алгоритм A-орбитальной линеаризации для аффинных систем с одним управлением. Алгоритм основан на построении флага Ли для распределения, ассоциированного с системой.

1. Введение

Решение многих задач управления аффинными системами существенно упрощается, если система может быть преобразована тем или иным способом в линейную управляемую систему. Говорят, что аффинная система линеаризуема обратной связью, если эта система может быть преобразована в линейную управляемую систему с помощью гладких невырожденных замен переменных состояния и управлений. Условия линеаризуемости аффинных систем обратной связью можно найти в работах [1, 2]. Между тем, возможности для линеаризации не исчерпываются заменами состояний и управлений. В работе [3] для преобразования аффинной системы в линейную управляемую систему было предложено использовать, помимо замен состояний и управлений, замены независимой переменной. В случае если аффинная система преобразуется в линейную управляемую систему заменами состояния, управления и независимой переменной, при этом замена независимой переменной не зависит от управления, то аффинную систему называют орбитально линеаризуемой [4]. Условия орбитальной линеаризуемости получены в работах [3–5].

В работе [6] показано, что использование замен независимой переменной, зависящих от управления, позволяет линеаризовать аффинные системы, не линеаризуемые орбитально. В работе [7] для аффинных систем со скалярным управлением введено понятие A-орбитальной линеаризуемости. Это понятие обобщает понятие орбитальной линеаризуемости на случай, когда используются замены независимой переменной, зависящие от управления. В [7] получено необходимое и достаточное условие A-орбитальной линеаризуемости аффинной системы со скалярным управлением в окрестности регулярной точки производного флага кораспределения, соответствующего системе. На основе доказанного условия в работе [7] разработан алгоритм A-орбитальной линеаризации аффинной системы со скалярным управлением.

В некоторых случаях использование техники работы с векторными полями более предпочтительно, чем использование техники работы с дифференциальными формами. В связи с этим цель настоящей работы – получить условия A-орбитальной линеаризуемости и разработать алгоритм A-орбитальной линеаризации для аффинных систем со скалярным управлением в терминах векторных полей, соответствующих системе.

2. *A*-орбитальная линеаризуемость аффинных систем

Рассмотрим аффинную систему

(1) $$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u,$$

с состоянием $x \in M$ и управлением $u \in \mathbb{R}$, M – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\dot{x} \equiv dx/dt$, f_0 и f_1 – гладкие векторные поля:

$$f_k = \sum_{j=1}^{n} f_k^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad f_k^j \in C^\infty(M), \quad k = 0, 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

В работе [7] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой матрицы*

(2) $$A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_0^0(x) & \alpha_1^0(x) \\ \alpha_0^1(x) & \alpha_1^1(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha_j^i \in C^\infty(M), \quad i, j = 0, 1,$$

невырожденной в области M, система (1) заменой независимой переменной

(3) $$\dot{\tau} = \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u,$$

и заменой управления

(4) $$v = \frac{\alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u}{\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u}.$$

преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x,u) : x \in M, \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0\}$ в аффинную систему

$$x' = g_0(x) + g_1(x)v,$$

ограниченную на множество $M_{xv} = \{(x,v) : x \in M, \alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v \neq 0\}$, где

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} = (A^{-1})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

В работе [7] предложено называть аффинную систему (1) A-орбитально линеаризуемой в области M, если существуют матрица (2), невырожденная в области M, и диффеоморфизм $\Phi\colon M \to P$, такие что система (1) заменой независимой переменной (3), заменой управления (4) и заменой состояния

$$y = \Phi(x) \tag{5}$$

преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x,u) : x \in M, \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0\}$ в линейную управляемую систему

$$(y^1)' = y^2, \ldots, (y^{n-1})' = y^n, (y^n)' = v,$$

ограниченную на множество $M_{yv} = \{(y,v) : y \in P, \alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v \neq 0, x = \Phi^{-1}(y)\}$.

3. Условия A-орбитальной линеаризуемости

Сопоставим системе (1) распределение $\mathcal{P} = \operatorname{span}\{f_0, f_1\}$ и его производный флаг

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}_k + [\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_k], \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Если каждое из распределений $\mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, регулярно в окрестности точки x_0, то точку x_0 называют регулярной точкой производного флага. Если $x_0 \in M$ – регулярная точка производного флага (6), то последовательность (6) конечна и может быть представлена в виде

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_N = \mathcal{P}_{N+1}, \tag{7}$$

где N – длина производного флага (7).

Напомним, что для гладкого распределения $\mathcal{Q}$, заданного в области M, характеристическим распределением $\mathcal{CQ}$ называют распределение, порожденное векторными полями $\xi \in \mathcal{Q}$, такими что $[\xi, \mathcal{Q}] \subset \mathcal{Q}$. Из определения следует, что если характеристическое распределение $\mathcal{CQ}$ регулярно в окрестности точки $x_0 \in M$, то $\mathcal{CQ}$ вполне интегрируемо в окрестности точки x_0.

Двойственная формулировка Теоремы из работы [7] имеет следующий вид.

Теорема 1. *Пусть x_0 – регулярная точка производного флага (6). Для того чтобы существовала окрестность точки x_0, в которой система (1) A-орбитально линеаризуема, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{P}(x_0) \not\subset \mathcal{CP}_{n-3}(x_0)$.*

С практической точки зрения более предпочтительным является использование флага Ли распределения $\mathcal{P}$. Напомним, что флаг Ли распределения $\mathcal{P}$ составляется по правилу

$$\mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}^{(i+1)} = \mathcal{P}^{(i)} + [\mathcal{P}^{(0)}, \mathcal{P}^{(i)}], \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Понятие регулярной точки ряда Ли вводится так же, как и для производного флага (6). Если x_0 – регулярная точка ряда Ли (8), то существует номер N, для которого выполнено равенство $\mathcal{P}^{(N)} = \mathcal{P}^{(N+1)}$. Наименьший номер N, удовлетворяющий этому условию, называют длиной флага Ли. Очевидно, для любого номера i имеет место включение $\mathcal{P}^{(i)} \subset \mathcal{P}_i$.

Главным результатом настоящей работы является следующее условие A-орбитальной линеаризуемости, записанное в терминах флага Ли (8).

Теорема 2. *Утверждения I и II эквивалентны:*
I. 1) x_0 – регулярная точка производного флага (6);
2) система (1) A-орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0.
II. 1) x_0 – регулярная точка флага Ли (8);
2) для всех $i = \overline{2, n-4}$ выполнены условия $[\mathcal{P}^{(i)}, \mathcal{P}^{(i)}] \subset \mathcal{P}^{(i+1)}$;
3) $N = n - 2$, где N – длина флага Ли (8).

Из доказательства теоремы 2 вытекает, что если выполнены условия из п. II, то для всех $i = \overline{0, n-2}$ в окрестности точки x_0 справедливы равенства $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}^{(i)}$, $\dim \mathcal{P}_i = \dim \mathcal{P}^{(i)} = i + 2$.

В работе доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1), 2), 3) пункта II теоремы 2; векторные поля ξ_1, ..., ξ_{n-3} таковы, что $\mathcal{P}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i-1)} + \operatorname{span}\{\xi_i\}$, $i = \overline{1, n-3}$;*

$$\mathcal{P}^{(n-2)} = \operatorname{span}\{f_0, f_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-3}, [f_k, \xi_{n-3}]\}, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Тогда

$$\mathcal{CP}_{n-3} = \operatorname{span}\{f_{1-k} - \beta^0 f_k, \xi_1 - \beta^1 f_k, \dots, \xi_{n-4} - \beta^{n-4} f_k\}, \tag{9}$$

где функции β_0, ..., β_{n-4} определяются из условий

$$\begin{aligned} &[f_{1-k}, \xi_{n-3}] \equiv \beta_0 [f_k, \xi_{n-3}] \mod \mathcal{P}^{(n-3)}, \\ &[\xi_j, \xi_{n-3}] \equiv \beta_j [f_k, \xi_{n-3}] \mod \mathcal{P}^{(n-3)}, \ j = \overline{1, n-4}. \end{aligned} \tag{10}$$

Из теоремы 2 и леммы 2 вытекает алгоритм A-орбитальной линеаризации системы (1) в окрестности регулярной точки x_0 флага Ли (8) распределения $\mathcal{P}$. Построим флаг Ли (8) распределения $\mathcal{P}$ и проверим выполнение в окрестности точки x_0 условий 2) и 3) пункта II теоремы 2. Если эти условия выполнены, то система (1) может быть A-орбитально линеаризована в окрестности точки x_0. Для того чтобы найти линеаризующие преобразования, построим, используя лемму 2, характеристическое распределение $\mathcal{CP}_{n-3}$ распределения $\mathcal{P}_{n-3}$. Пусть

$$\mathcal{P}^{(n-4)} = \operatorname{span}\{f_0, f_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-4}\}, \quad \mathcal{P}^{(n-3)} = \operatorname{span}\{f_0, f_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-3}\},$$

$$\mathcal{P}^{(n-2)} = \operatorname{span}\{f_0, f_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-3}, [f_k, \xi_{n-3}]\}, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Вычислим коммутаторы $[f_{1-k}, \xi_{n-3}]$, $[\xi_j, \xi_{n-3}]$, $j = \overline{1, n-4}$, и разложим их по базису f_0, f_1, ξ_1, ..., ξ_{n-3}, $[f_k, \xi_{n-3}]$ распределения $\mathcal{P}^{(n-2)}$. Пусть эти разложения имеют вид (10). Тогда характеристическое распределение $\mathcal{CP}_{n-3}$ распределения $\mathcal{P}_{n-3}$ описывается формулой (9). Это $(n-3)$-мерное вполне интегрируемое распределение. Найдем полную систему z^1, z^2, z^3 его первых интегралов. Выберем среди функций z^1, z^2, z^3 такую функцию z^i, $i \in \{1, 2, 3\}$, что в точке x_0 выполнено неравенство $f_k z^i \neq 0$, где $f_k z^i$ – производная функции z^i по векторному полю f_k. Обозначим $y^1 = z^i$. Построим распределение $\mathcal{Q} = \{\xi \in \mathcal{P}^{(n-3)} : \xi y^1 = 0\}$. Из доказательства теоремы 1 следует, что $\mathcal{Q}$ – $(n-2)$-мерное, вполне интегрируемое распределение. Очевидно, одним из его первых интегралов является функция y^1. Найдем еще один первый интеграл y^2 распределения $\mathcal{Q}$, функционально независимый с y^1 и удовлетворяющий неравенству $y^2(x_0) \neq 0$. Определим функции y^3, ..., y^n по формулам

$$y^j = \frac{f_k y^{j-1}}{f_k y^1} y^2, \quad j = \overline{3, n},$$

Вычислим производные $\dot{y}^1 = \tilde{\alpha}_0^0 + \tilde{\alpha}_1^0 u$, $\dot{y}^n = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 u$ функций y^1 и y^n в силу системы (1) и обозначим $\alpha_0^0 = \tilde{\alpha}_0^0/y^2$, $\alpha_1^0 = \tilde{\alpha}_1^0/y^2$. Тогда линеаризующие преобразования (3) и (4) задаются матрицей $A = (\alpha_j^i)_{j=0,1}^{i=0,1}$, а линеаризующий диффеоморфизм (5) определяется функциями $y^1, \ldots, y^n$.

4. Заключение

В работе получено необходимое и достаточное условие A-орбитальной линеаризуемости аффинной системы с одним управлением в окрестности регулярной точки флага Ли распределения, ассоциированного с системой. Разработан алгоритм, позволяющий установить, является ли рассматриваемая система A-орбитально линеаризуемой в окрестности такой точки, и если ответ на этот вопрос положительный, то построить линеаризующие замены независимой переменной, управления и состояния.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-07-00653).

Список литературы

1. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. Vol. 28. P. 517-522.
2. Gardner R.B., Shadwick W.F. The GS Algorithm for Exact Linearization to Brunovsky Normal Form // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. Vol. 37, No. 2. P. 224-230.
3. Sampei M., Furuta K. On time scaling for nonlinear systems: Application to linearization // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31. P. 459-462.
4. Respondek W. Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems // IFAC Proceedings Volumes. 1998. Vol. 31, No. 17. P. 483-488.
5. Guay M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // Systems and Control Letters. 1999. Vol. 38, No. 4-5. P. 271-281.
6. Фетисов Д.А. Линеаризация аффинных систем на основе замен независимой переменной, зависящих от управления // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1514-1525.
7. Фетисов Д.А. А-орбитальная линеаризация аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 11. С. 1518-1532.