

УДК 517.977.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ КАСКАДНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ

В.В. Фомичев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус,
факультет ВМК
E-mail: fomichev@cs.msu.ru

А.О. Высоцкий

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус,
факультет ВМК
E-mail: vysockiial@gmail.com

Ключевые слова: наблюдатели, относительный порядок, устойчивость, нелинейная и разрывная обратная связь, каскадный метод.

Аннотация: Рассматривается задача построения асимптотического наблюдателя для линейной стационарной системы с неизвестным ограниченным входом (возмущением) с произвольным относительным порядком, и с устойчивыми инвариантными нулями. Для решения задачи используется наблюдатель для нулевой динамики системы и каскад двумерных наблюдателей для подсистемы с максимальным относительным порядком. В наблюдателях каскада используется комбинация нелинейной и разрывной обратной связи.

1. Постановка задачи

В той или иной постановке задача построения фазовых наблюдателей для систем в условиях неопределенности рассматривалась многими авторами, в частности, в монографиях [1–5]. Для линейных стационарных систем наиболее успешно задача решается для гипервыходных систем или для квадратных систем с минимальным относительным порядком [5]. Если же система имеет произвольный относительный порядок, то задача существенно усложняется. Для ее решения может использоваться, например, глубокая обратная связь [7].

Рассмотрим более точную постановку задачи. Пусть задана система

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B'\xi \\ y = Cx, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – неизвестный фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}$ – известный вход (управление), $\xi \in \mathbb{R}$ – неизвестный вход (возмущение), $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход системы, стационарные матрицы A , B , B' и C – известные. Требуется по известной информации об управлении $u(t)$, выходе $y(t)$ и параметрах системы построить асимптотическую (при $t \rightarrow +\infty$) оценку фазового вектора.

Относительно системы (1) делаются следующие предположения

Предположение 1. *Относительный порядок системы $r > 1$.*

Под относительным порядком понимается число r такое, что

$$CB' = 0, CAB' = 0, \dots, CA^{r-2}B' = 0, CA^{r-1}B' \neq 0,$$

т.е. рассматривается относительный порядок от неизвестного входа $\xi(t)$ к измеряемому выходу $y(t)$.

Предположение 2. *Инвариантные нули системы устойчивы (т.е. $Re(s^*) < 0$, где s^* – инвариантный ноль системы).*

Под инвариантными нулями понимаются значения $s \in \mathbb{C}$, для которых понижается ранг матрицы Розенброка, т.е.

$$\text{rank}R(s) = \text{rank} \left[\begin{array}{c|c} sI - A & -B' \\ \hline C & 0 \end{array} \right] < n + 1.$$

Т.е. рассматриваются инвариантные нули передаточной функции от $\xi(t)$ к $y(t)$:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B' = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \beta(s) = \det R(s)$$

Предположение 3. *Неизвестный вход (помеха) кусочно-непрерывен и равномерно ограничен, причем известна его мажоранта, т.е. $|\xi(t)| \leq \xi_0$.*

2. Преобразование системы. Оценивание части фазового вектора

При сделанных предположения система (1) приводится к виду с выделением нулевой динамики (нормальной форме) [5]

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}' = A_1 x' + b_1 y + \tilde{b}_1 u \\ \dot{y}_i = y_{i+1} + \bar{b}_i u, i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{y}_r = A_2 x' + A_3 y' + b_2 \xi + \bar{b}_r u, \end{cases}$$

где $x' \in \mathbb{R}^{n-r}$, $y' = (y_1, \dots, y_r)^T \in \mathbb{R}^r$ – части преобразованного фазового вектора ($y_i(t) = y^{(i-1)}(t)$), A_i , b_1 , \tilde{b}_1 – постоянные матрицы соответствующих размеров, \bar{b}_i и b_2 – константы, $b_2 = CA^{r-1}B' \neq 0$. Спектр матрицы A_1 определяется инвариантными нулями системы, т.е. $\det(sI - A_1) = \beta(s)$.

В силу Предположения 2 матрица A_1 гурвицева, а значит наблюдатель

$$(3) \quad \dot{\tilde{x}}' = A_1 \tilde{x}' + b_1 y + \tilde{b}_1 u$$

асимптотически точно восстанавливает часть фазового вектора x' . Таким образом, остается оценить часть фазового вектора $y' \in \mathbb{R}^r$. Перед построением основного наблюдателя проведем предварительную оценку неизвестного вектора y' в системе (2). Для этого используем классический наблюдатель с линейной обратной связью:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{\bar{y}}_i = \bar{y}_{i+1} + \bar{b}_i u - l_i(\bar{y}_1 - y), i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{\bar{y}}_r = A_2 \tilde{x}' + A_3 \bar{y}' + \bar{b}_1 u - l_r(\bar{y}_1 - y), \end{cases}$$

где \tilde{x}' – оценка для x' из (3), $\bar{y}' = (\bar{y}'_1, \dots, \bar{y}'_r)^T$, а коэффициенты l_i выбираются из условия устойчивости матрицы A_l системы (4). Спектр матрицы A_l назначается выбором l_i . Ошибка оценивания $\varepsilon' = y' - \bar{y}'$ удовлетворяет уравнению

$$(5) \quad \dot{\varepsilon}' = A_l \varepsilon' + b_0 \xi',$$

где $b_0 = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^r$, $\xi' = b_2 \xi(t) + A_2 e'(t)$, $e'(t) = x' - \tilde{x}' \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В силу Предположения 3 неизвестный сигнал $\xi'(t)$ начиная с некоторого момента времени равномерно ограничен, т.е.

$$(6) \quad |\xi'(t)| \leq \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_0 = |CA^{r-1}B'| \xi_0 + \Delta, \Delta > 0 - \text{произвольная малая величина.}$$

Далее считаем, что матрица A_l – гурвицева, т.е. $|e^{A_l t}| \leq C_0 e^{-\gamma t}$, а $\xi'(t)$ удовлетворяет оценке (6) при $t > 0$. Тогда и вектор $\varepsilon'(t)$ равномерно ограничен при $t > 0$. Если выбрать $\bar{y}'(0) = 0$, то

$$(7) \quad |\varepsilon'(t)| \leq C(|y'(0)| - \frac{1}{\gamma})e^{-\gamma t} + \frac{C_0 \bar{\xi}_0}{\gamma}$$

Тогда с некоторого момента времени

$$(8) \quad |\varepsilon'(t)| \leq \bar{\xi}_0 = C_0 \frac{\bar{\xi}_0}{\gamma} + \bar{\Delta}, \bar{\Delta} > 0 - \text{произвольная малая величина.}$$

Таким образом, задача оценивания вектора $y'(t)$ сводится к оцениванию ограниченного вектора $\varepsilon'(t)$ из системы (5), удовлетворяющего известной оценке (8), т.к. $y' = \bar{y}' + \varepsilon'$.

Сделав замену координат $e = T\varepsilon'$ в системе (5) можно прийти к форме сопровождающей матрицы:

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{e}_i = -\tilde{l}_i e_1 + e_{i+1}, i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{e}_r = -\tilde{l}_r e_1 + \xi' \\ \tilde{y} = e_1, \end{cases}$$

где $\det(sI - A_l) = \det(sI - \tilde{A}) = s^r + \tilde{l}_1 s^{r-1} + \dots + \tilde{l}_r$. Система (9) представляет собой систему с гурвицевой матрицей, с ограниченным входом ξ' и максимальным относительным порядком.

3. Базовый случай второго порядка и каскад наблюдателей

Рассмотрим случай системы (9) при $r = 2$. Для решения задачи используем наблюдатель

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1 = -\tilde{l}_1 y + \tilde{e}_2 + k \operatorname{sgn} \varepsilon_1 |\varepsilon_1|^\alpha \\ \dot{\tilde{e}}_2 = -\tilde{l}_2 y + \mu \operatorname{sgn} \varepsilon_1, \end{cases}$$

где $\varepsilon_1 = \tilde{y} - \tilde{e}_1 = e_1 - \tilde{e}_1$; $\varepsilon_1 = e_2 - \tilde{e}_2$, k, α и μ – положительные константы. Ошибка оценивания удовлетворяет уравнению

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - k \operatorname{sgn} \varepsilon_1 |\varepsilon_1|^\alpha \\ \dot{\varepsilon}_2 = -\mu \operatorname{sgn} \varepsilon_1 + \xi' \end{cases}$$

Имеет место утверждение [6]

Теорема 1. Пусть в системе (11) $k = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, сигнал $\xi'(t)$ кусочно-непрерывен, $|\xi'(t)| \leq \bar{\xi}_0$ при $t \geq 0$. Тогда существует значение $\mu > \xi_0$ такое, что $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Замечание 1. В [6] приведено уравнение, которому удовлетворяет μ , но можно показать, что сходимость к нулю будет при любом $\mu > \bar{\xi}_0 + \frac{1}{8}$.

Замечание 2. Можно показать, что наблюдатель (10) решает задачу и в том случае, если выход известен с точностью до асимптотически убывающего слагаемого, т.е. известен сигнал $\tilde{y} = \tilde{y} + \delta(t)$, $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае в наблюдателе используется не $\varepsilon_1(t) = \tilde{y} - e_1$, а $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{y} - e_1$.

Замечание 3. Численное моделирование показывает, что наблюдатель работает при выборе параметров из условий: $k > 0, 0 < \alpha < 1, \mu > \bar{\xi}_0$.

Используем базовый случай для построения наблюдателя при произвольном r .

Рассмотрим два уравнения из (9):

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{e}_i = -\tilde{l}_i \tilde{y} + e_{i+1} \\ \dot{e}_{i+1} = -\tilde{l}_{i+1} \tilde{y} + e_{i+2} \end{cases}$$

как систему 2-го порядка с неизвестным входом $e_{i+2}(t)$, удовлетворяющим оценке (8), т.е. $|e_{i+2}(t)| \leq \xi_0$. Если на предыдущем этапе построена оценка \bar{e}_i такая, что $(\bar{e}_i(t) - e_i(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то задачу оценивания $e_{i+1}(t)$ решает наблюдатель

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{e}}_i = -\tilde{l}_i \tilde{y} + \tilde{e}_{i+1} + k \operatorname{sgn} \tilde{\varepsilon}_i |\tilde{\varepsilon}_i|^\alpha \\ \dot{\tilde{e}}_{i+1} = -\tilde{l}_{i+1} \tilde{y} + \mu \operatorname{sgn} \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_i = \tilde{e}_i - \bar{e}_i \end{cases}$$

Получив таким образом оценку $\bar{e}_{i+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{e}_{i+1}$ можно перейти к следующему наблюдателю каскада.

4. Примеры моделирования

Для системы вида (9) с коэффициентами $\tilde{l}_1 = 6, \tilde{l}_2 = 10, \tilde{l}_3 = 12, \tilde{l}_4 = 5, \tilde{l}_5 = 1$ при наихудшей помехе $\xi' = \operatorname{sgn} \varepsilon_5$ был построен каскадный наблюдатель из четырех систем вида (13) с параметрами $k = 1, \alpha = \frac{1}{2}$. Параметр μ брался равным 13.2, 15.2, 8.3, 1.5 для первой, второй, третьей и четвертой системы каскада соответственно. Численное интегрирование производилось методом Эйлера первого порядка с шагом 0.001 секунды для получения оценок для e_2 и e_3 и 0.0001 секунды для e_4 и e_5 средствами Matlab Simulink.

Из графиков (рис. 1) видно, что при численном моделировании в установившемся режиме имеет место погрешность оценивания. Порядки величины погрешностей следующие: для e_2 это около 0.1, для $e_3 - 0.3$, $e_4 - 0.05$, $e_5 - 0.1$. Однако, при уменьшении

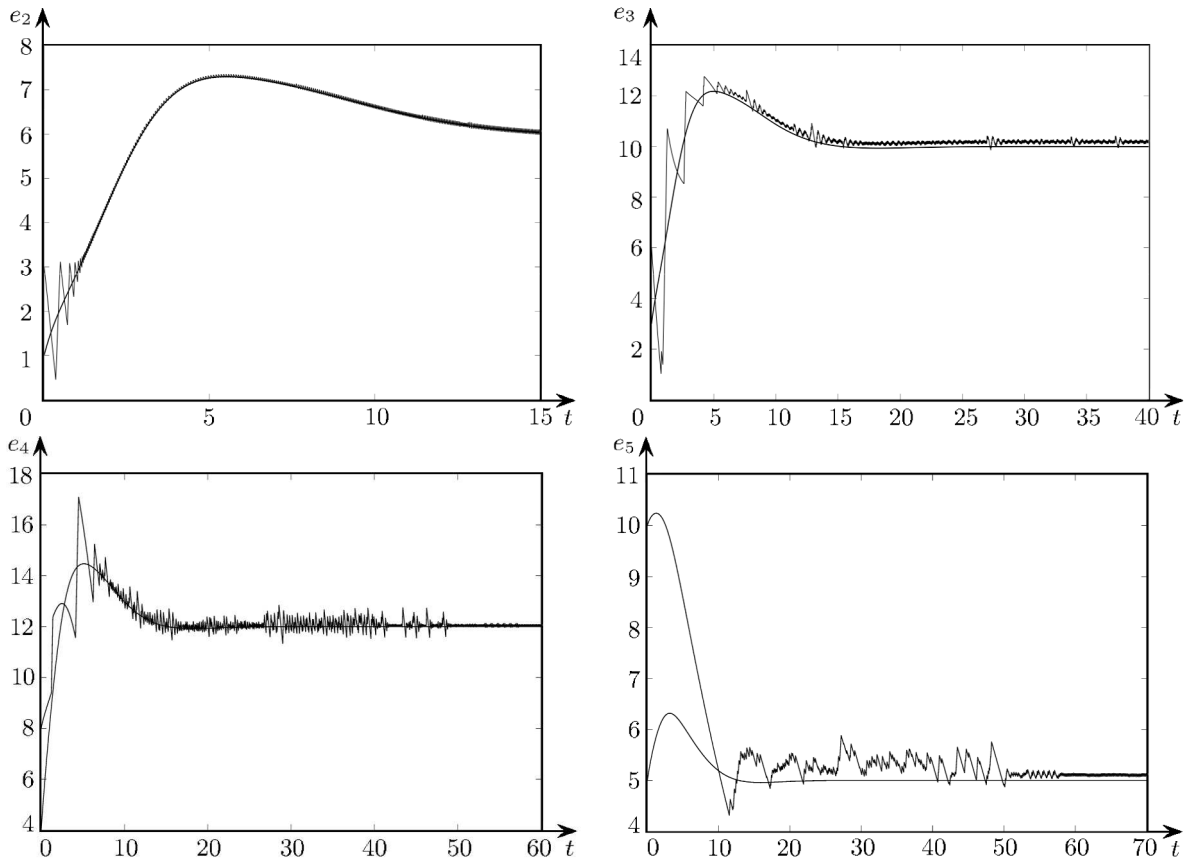


Рис. 1: Сравнение траектории наблюдателя и исходной системы

шага интегрирования при численном моделировании мы будем наблюдать также и уменьшение величин погрешностей оценивания. Это говорит о том, что эта погрешность является не погрешностью метода оценивания, а погрешностью численного решения уравнений наблюдателя, связанной с неидеальностями при моделировании релейных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-07-00540, 17-07-00899).

Список литературы

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1977. 392 с.
2. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазовых состояний динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
3. O'Reilly J. Observers for linear systems. London: Academic Press, 1983. 246 p.
4. Trinh H., Fernando T. Functional observers for dynamical systems. Berlin: Springer, 2012. 220 p.
5. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
6. Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 11. С. 1533-1539.
7. Goncharov O.I., Fomichev V.V. Observer for multivariable systems of arbitrary relative order // Computational Mathematics and Modeling, 2013. Vol. 24, No. 2. P. 182-202.