УДК 62-551.4+681.5.03

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ H_∞ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

В.Н. Честнов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vnchest@yandex.ru

Д.В. Шатов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: dvshatov@gmail.com

И.А. Лебедев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: LebedevMSZ@gmail.com

Ключевые слова: линейные многомерные системы, синтез дискретных регуляторов, ограниченные внешние возмущения, ошибки регулирования, радиус запасов устойчивости, время регулирования.

Аннотация: Рассматривается задача синтеза дискретных регуляторов для многомерных объектов по заданным или достижимым инженерным показателям качества: ошибке регулирования по каждой регулируемой переменной (при действии ограниченных внешних возмущений), времени регулирования и радиусу запасов устойчивости. Решение такой задачи опирается на специальным образом сконструированную задачу H_∞ оптимизации.

1. Введение

Цифровые регуляторы заняли главенствующее положение в промышленности, энергетике, авиации, роботехнике и т.д. Поэтому задача синтеза дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным показателям качества приобретает, не виданную ранее, актуальность и важность в связи с реальными запросами инженеров-проектировщиков. В месте с тем современные техники синтеза регуляторов по измеряемому выходу H_2, H_∞, L_1 (l_1), μ-синтеза, как правило, учитывают лишь отдельные показатели качества, либо не учитывают их вовсе.

Настоящая работа посвящена проблеме синтеза дискретных регуляторов для многомерных объектов по заданным или достижимым инженерным показателям качества: ошибке регулирования по каждой регулируемой переменной, времени регулирования и радиусу запасов устойчивости. Решение такой задачи опирается на специальным образом сконструированную проблему H_∞ оптимизации. В этом смысле предлагаемый подход развивает результат работы [1] введением в рассмотрение неизмеряемых полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами (с ограничением их суммы), частотами и неограниченным их числом. Такой класс внешних возмущений покрывает большинство реально действующих на практике возмущений, приводящих в системах стабилизации к отклонению регулируемых переменных от нуля. Для непрерывных систем с известным числом гармоник полигармонического возмущения подобный подход к синтезу анонсирован в работе [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемую и наблюдаемую дискретную модель непрерывного объекта управления, описываемую разностными уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k),\\
&y(k) = Cx(k),\ k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояния объекта, $u(k) \in R^m$ – вектор управления (выход регулятора), $y(k) \in R^{m_2}$ – измеряемый и одновременно регулируемый выход (вход регулятора), $w(k) \in R^{m_3}$ – вектор неизмеряемых внешних возмущений. Матрицы объекта A, B_1, B_2, C соответствующего размера известны.

Предположим, что объект управления (1) замкнут дискретным стабилизирующим регулятором по выходу

$$
\begin{aligned}
&x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c y(k),\\
&u(k) = C_c x_c(k) + D_c y(k),\ k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где $x_c(k) \in R^{n_c}$ – состояние регулятора ($n_c \leqslant n$), и $A_c,\ B_c,\ C_c,\ D_c$ – матрицы чисел.

Компоненты возмущения w – ограниченные полигармонические функции:

$$
w_i(k) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \sin(\omega_j kh + \phi_{ij}),\ i = \overline{1, m_3},\ k = 0, 1, 2, \dots,
$$

где h – период дискретности. Амплитуды $w_{ij} \geqslant 0$, фазы $\phi_{ij},\ i = \overline{1, m_3}$ и частоты $\omega_j,\ j = \overline{1, \infty}$ внешних возмущений неизвестны. Число частот не ограничено.

Предполагается, что внешнее возмущение ограничено в следующем смысле:

$$
\sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \leqslant w_i^*,\ i = \overline{1, m_3},
$$

где $w_i^* > 0$ – известные числа.

Ошибки по регулируемым переменным определяются соотношениями:

$$
y_{i,st} = \sup_{k \geqslant k_{\text{p}}} |y_i(k)|,\ i = \overline{1, m_2},
$$

где k_{p} – число тактов, соответствующее времени регулирования $t_{\text{p}} = k_{\text{p}} h$.

Требования к точности системы выражаются неравенствами:

$$y_{i,st} \leqslant y_i^*,\ i = \overline{1, m_2}, \tag{3}$$

где $y_i^* > 0$ – заданные числа (желаемые ошибки регулирования).

Число тактов $k_р$ определяется из следующих условий:

$$|\lambda_i(A_{cl})| \leqslant \frac{1}{\alpha},\ i = \overline{1, n + n_c}, \tag{4}$$

где $\alpha \geqslant 1$ – заданное число, а A_{cl} – матрица замкнутой системы (1), (2):

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C & B_2 C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}.$$

Здесь $1/\alpha$ – радиус круга с центром в начале координат (степень устойчивости), внутри которого лежат все собственные числа матрицы A_{cl}.

На практике выбор желаемого значения α определяется из соотношения $\alpha = e^{\beta h}$ [1], где β – степень устойчивости непрерывной системы. Известна приближенная оценка времени регулирования $t_р \approx 3/\beta$, откуда получим $\alpha = e^{3h/t_р}$. Это выражение дает приемлемую в инженерном смысле оценку, если среди собственных чисел матрицы A_{cl} нет кратных ближайших к единичной окружности.

Наличие радиуса запасов устойчивости $0 < r < 1$ на физическом входе объекта гарантируется, если выполняется следующее частотное неравенство [1]

$$[I + W^u(e^{-j\omega h})]^T [I + W^u(e^{j\omega h})] \geqslant r^2 I,\ \omega \in [0, \pi/h], \tag{5}$$

где I – единичная матрица соответствующего размера, $W^u(\mathrm{z}) = -K(\mathrm{z})W(\mathrm{z})$ – передаточная матрица разомкнутой системы (1), (2) по входу объекта, $W(\mathrm{z}) = C(\mathrm{z}\,I - A)^{-1}B_2$ – передаточная матрица объекта по управлению; $K(\mathrm{z}) = C_c(\mathrm{z}\,I - A_c)^{-1}B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора, z – символ Z-преобразования.

Задача 1. *Найти матрицы A_c, B_c, C_c, D_c стабилизирующего регулятора (2) такие, чтобы выполнялись следующие целевые условия:*

- *к точности $y_{i,st} < \gamma y_i^*$, $i = \overline{1, m_2}$, где γ – заданное (достижимое) число;*
- *радиусу запасов устойчивости (5), где $0 < r < 1$, где r – заданное (достижимое) число;*
- *собственные числа матрицы матрицы A_{cl} удовлетворяют условию (4), в котором $\alpha \geqslant 1$ – заданное (достижимое) число.*

3. Основные результаты

Переходя в уравнениях (1), (2) к Z-преобразованию при нулевых начальных условиях, получим:

$$y = W(\mathrm{z})z_1 + W_1(\mathrm{z})w,\ z_1 = u + w_1,\ z_2 = Q^{1/2}y,\ u = K(\mathrm{z})y, \tag{6}$$

где $W_1(\mathrm{z}) = C(\mathrm{z}\,I - A)^{-1}B_1$ – передаточная матрица объекта по возмущению; $w_1 \in R^m$ – фиктивный вход объекта (1); $z_1 \in R^m$ – вектор фиктивных регулируемых переменных. Структурная схема соответствующая уравнениям (6) приведена на Рис. 1 а).

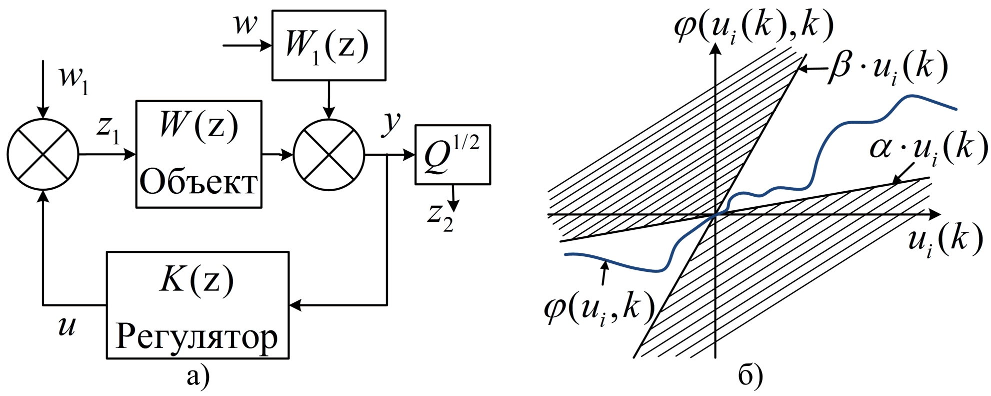

Рис. 1. а) Структурная схема замкнутой системы; б) Секторная нелинейность, вводимая по i-му входу объекта

Матрица чувствительности $T_{z_1w_1}(\mathrm{z}) = [I+W^u(\mathrm{z})]^{-1}$, связывающая w_1 и z_1, служит для обеспечения требований к радиусу запасов устойчивости (5).

Регулируемые переменные $z_2 = Q^{1/2}y$ служит для обеспечения требуемой точности (3) по реальному выходу объекта y с помощью выбора весовой матрицы $Q = \mathrm{diag}[q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{m_2}]$, содержащей выбираемые по специальным правилам (см. ниже) положительные элементы $q_i > 0,\ i = \overline{1, m_2}$

Введем расширенные вектора возмущений и регулируемых переменных: $\overline{w}^T = [w_1^T\ w^T]$ и $\overline{z}^T = [z_1^T\ z_2^T]$, а матрицу, связывающую их, обозначим $T_{\overline{z}\,\overline{w}}(\mathrm{z})$. Тогда

$$\overline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{\overline{z}\,\overline{w}}(\mathrm{z}) \cdot \overline{w} = \begin{bmatrix} T_{z_1w_1} & T_{z_1w} \\ Q^{1/2}T_{yw_1} & Q^{1/2}T_{yw} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w \end{bmatrix}.$$

Пусть регулятор с матрицами $\tilde{A}_c,\ \tilde{B}_c,\ C_c,\ D_c$ разрешает смещенную задачу минимизации H_∞ нормы матрицы

(7) $$\|T_{\overline{z}\,\overline{w}}\left(e^{(-\beta+j\omega)h}\right)\|_\infty < \gamma, \quad \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Для перехода к такой задаче (7) необходимо заменить матрицы объекта (1) на смещенные $\tilde{A} = A\alpha$, $\tilde{B}_1 = B_1\alpha$ и $\tilde{B}_2 = B_2\alpha$. Регулятор, который обеспечивает требуемую степень устойчивости, имеет матрицы [1,3]:

(8) $$A_c = \tilde{A}_c/\alpha,\ B_c = \tilde{B}_c/\alpha,\ C_c,\ D_c.$$

Сформулируем основные результаты работы:

Теорема 1. *Регулятор (2) с матрицами (8) разрешает задачу 1, если коэффициенты весовой матрицы Q для смещенной H_∞ задачи (7) выбраны из равенств:*

$$q_i = \frac{(\sum_j^{m_3} w_j^*)^2}{(y_i^*)^2},\ i = \overline{1, m_2}.$$

При этом радиус запасов устойчивости на входе объекта определяется как $r = \gamma^{-1}$, где γ – реализовавшееся значение при решения H_∞ задачи (7).

Теорема 2. *Пусть выполняется матричное неравенство (5), тогда годограф Найвиста системы (1), (2), (8), разомкнутой по любому входу объекта управления, не касается круга радиуса r с центром в критической точке* $(-1,\ j0)$.

Геометрическая интерпретация теоремы 2 дает основания, используя круговой критерий абсолютной устойчивости [4], сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть решена задача 1 и/или выполняется матричное неравенство (5), тогда нелинейная система (1), (2), (8) с секторной нестационарной нелинейностью (см. Рис. 1 б)), вводимой по любому из физических входов объекта будет абсолютно устойчива (при $w = 0$), при этом размер сектора $[\alpha\ \beta]$ определяется как $\alpha = 1/(1 + r)$ и $\beta = 1/(1 - r)$, где $r = 1/\gamma$.*

В частном случае эту нелинейность можно рассматривать как нестационарный коэффициент усиления $l(k)$, изменяющийся в указанных границах $[\alpha\ \beta]$ произвольным образом. Это подчеркивает робастные свойства построенного регулятора.

Численная эффективность предложенного подхода к синтезу была проверена при решении широко известной "benchmark"-задачи, рассмотренной в [1]. Дискретный регулятор, построенный по предложенной технике, с периодом дискретности $h = 0{,}01$, как и в работе [1], продемонстрировал существенно более высокие робастные свойства, нежели известные подходы к синтезу непрерывных регуляторов (см. сравнительную характеристику этих подходов в работе [5]).

4. Заключение

В работе предложен метод синтеза дискретных регуляторов по измеряемому выходу для линейных многомерных систем, при действии неизмеряемых ограниченных полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами (их сумма ограничена по каждой компоненте возмущения), частотами и неограниченном их числом, который обеспечивает заданные (достижимые): ошибки регулирования, время регулирования и радиус запасов устойчивости на входе объекта.

Подход к решению такой задачи базируется на специальным образом сконструированной стандартной H_∞-проблеме и носит достаточный характер.

Сформулированы правила выбора коэффициентов весовой матрицы (по заданной точности) при синтезе регулятора. Дана интерпретация радиуса запасов устойчивости на языке годографов Найквиста для отдельных контуров, разомкнутых по входу объекта. Указаны границы секторной нелинейности (в частности, нестационарного коэффициента усиления), при наличии которой на любом входе объекта, замкнутая система с полученным регулятором абсолютно устойчива. Эти границы определяются величиной радиуса запасов устойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-08-01067).

Список литературы

1. Честнов В.Н. Синтез дискретных H_∞-регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 65–82.
2. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности, времени регулирования и радиуса запасов устойчивости // Дифференциальные уравнения. 2014. № 8. С. 1138-1139.

3. Честнов В.Н. Синтез H_∞-регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 170–185.
4. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 С.
5. Честнов В.Н., Самшорин Н.И. Синтез регуляторов по заданному показателю колебательности: параметрические и внешние возмущения, ограниченные по мощности // Проблемы управления. 2017. № 3. С. 17-25.