

УДК 004.94+519.711:681.5

# ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫЙ КВАДРАТНО-КОРНЕВОЙ ИНФОРМАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ МУЛЬТИСЕНСОРНОЙ КАЛМАНОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

**А.В. Цыганов**

*Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова*

Россия, 432071, Ульяновск, пл. Ленина, 4/5

E-mail: [andrew.tsyganov@gmail.com](mailto:andrew.tsyganov@gmail.com)

**Ю.В. Цыганова**

*Ульяновский государственный университет*

Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42

E-mail: [tsyganovajv@gmail.com](mailto:tsyganovajv@gmail.com)

**Ключевые слова:** децентрализованный фильтр Калмана, мультисенсорное оценивание, квадратно-корневой информационный алгоритм, J-ортогональное преобразование.

**Аннотация:** В работе рассмотрена задача построения децентрализованной вычислительной схемы калмановской фильтрации на основе численно устойчивого квадратно-корневого информационного алгоритма. Для реализации этапа ассимиляции в децентрализованном фильтре применяются матричные J-ортогональные преобразования. Предложенный алгоритм может быть использован в децентрализованных вычислительных схемах оценивания вектора состояния линейной динамической системы по данным мультисенсоров.

## 1. Математическая модель мультисенсорной системы

Рассмотрим математическую модель динамического процесса, заданную линейной стохастической системой в пространстве состояний  $x$  с измерениями  $z$

$$(1) \quad x(k) = F(k-1)x(k-1) + G(k-1)w(k-1),$$

$$(2) \quad z(k) = H(k)x(k) + v(k), \quad k > 0,$$

где  $k$  – дискретный отсчет времени,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния, подлежащий оцениванию;  $z(k) \in \mathbb{R}^m$  – составной вектор всех доступных измерений в текущий момент времени  $k$ . Шумы  $\{w(k)\}$  и  $\{v(k)\}$  – независимые нормально распределенные последовательности с нулевым математическим ожиданием и положительно определенными матрицами ковариаций  $Q(k)$  и  $R(k)$ , соответственно. Начальное значение вектора состояния  $x(0) \sim \mathcal{N}(\bar{x}(0), \Pi(0))$ . Вектор  $x(0)$  не зависит от  $\{w(k)\}$  и  $\{v(k)\}$ .

Предположим, что матрицу измерений  $H(k)$  и ковариационную матрицу ошибок измерений  $R(k)$  можно представить в виде

$$(3) \quad H(k) = [H_1^T(k)|H_2^T(k)|\dots|H_N^T(k)]^T \text{ и } R(k) = \text{blockdiag}(R_1(k), R_2(k), \dots, R_N(k)).$$

Тогда уравнение (2) с учетом (3) представляет собой глобальную модель измерений некоторой мультисенсорной системы.

Рассмотрим сеть сенсоров с полносвязной топологией, состоящую из  $N$  узлов, в которой каждый узел  $i$  имеет возможность вычислять с помощью алгоритма калмановской фильтрации собственные оценки  $\hat{x}_i(k)$  вектора состояния  $x(k)$  и соответствующие им матрицы ковариаций ошибок оценивания  $\hat{P}_i(k)$ . Измерения и оценки, получаемые в узлах, называют локальными [1]. Предположим, что модель динамического процесса (1) одинакова в каждом узле, а локальные измерения описываются уравнением  $z_i(k) = H_i(k)x(k) + v_i(k)$ , где  $v_i(k) \sim \mathcal{N}(0, R_i(k))$ . Предположим также, что шумы измерений в узлах  $i$  и  $j$  некоррелированы, т.е. матрица  $R(k)$  – блочно-диагональная.

Фильтр Калмана [2] является рекуррентным алгоритмом оптимального линейного оценивания. На каждом шаге он позволяет вычислить оценку вектора состояния  $\hat{x}(k)$  и значение ковариационной матрицы ошибки оценивания  $\hat{P}(k)$ .

В настоящее время существует множество различных модификаций алгоритма Калмана [3]. Среди них информационный фильтр, в котором вместо матрицы  $\hat{P}(k)$  на каждом шаге вычисляют значения информационной матрицы  $\hat{Y}(k) \triangleq \hat{P}^{-1}(k)$ , а вместо  $\hat{x}(k)$  вычисляют информационную оценку  $\hat{y}(k) \triangleq \hat{Y}(k)\hat{x}(k)$ .

В информационном фильтре этап обновления оценок по текущему измерению определяется уравнениями

$$(4) \quad \hat{y}(k) = \tilde{y}(k) + \Delta y(k), \quad \Delta y(k) = H^T(k)R^{-1}(k)z(k),$$

$$(5) \quad \hat{Y}(k) = \tilde{Y}(k) + \Delta Y(k), \quad \Delta Y(k) = H^T(k)R^{-1}(k)H(k),$$

где  $\Delta y(k)$  и  $\Delta Y(k)$  – соответственно обновления информационного вектора  $\hat{y}(k)$  и информационной матрицы  $\hat{Y}(k)$ ; величины  $\tilde{y}(k)$  и  $\tilde{Y}(k)$  получены на этапе экстраполяции информационного фильтра [3].

## 2. Децентрализованный информационный фильтр

Ключевая идея децентрализованного фильтра состоит в возможности выразить глобальные обновления информационного вектора и информационной матрицы через локальные [1, 4]:

$$(6) \quad \Delta y(k) = H^T(k)R^{-1}(k)z(k) = \sum_{i=1}^N H_i^T(k)R_i^{-1}(k)z_i(k) = \sum_{i=1}^N \Delta y_i(k),$$

$$(7) \quad \Delta Y(k) = H^T(k)R^{-1}(k)H(k) = \sum_{i=1}^N H_i^T(k)R_i^{-1}(k)H_i(k) = \sum_{i=1}^N \Delta Y_i(k).$$

Локальные обновления вычисляются в каждом узле и передаются всем остальным узлам.

*Локальный прогноз (по предыдущим измерениям)*

$$(8) \quad C(k) = G^T(k)A(k)G(k) + Q^{-1}(k), \quad A(k) = F^{-T}(k)\hat{Y}_i(k)F^{-1}(k),$$

$$(9) \quad \tilde{Y}_i(k+1) = [I - L(k)G^T(k)]A(k), \quad L(k) = A(k)G(k)C^{-1}(k),$$

$$(10) \quad \tilde{y}_i(k+1) = [I - L(k)G^T(k)]F^{-T}(k)\hat{y}_i(k).$$

*Локальное обновление (по текущему измерению)*

$$(11) \quad \Delta y_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)z_i(k), \quad \Delta Y_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)H_i^T(k).$$

*Коммуникация и ассимиляция*

$$(12) \quad \hat{Y}_i(k) = \tilde{Y}_i(k) + \sum_{j=1}^N \Delta Y_j(k), \quad \hat{y}_i(k) = \tilde{y}_i(k) + \sum_{j=1}^N \Delta y_j(k).$$

В любой момент времени  $k$  в каждом из  $N$  узлов доступна оценка вектора состояния  $\hat{x}_i(k) = \hat{Y}_i^{-1}(k)\hat{y}_i(k)$ . Как показано в [1], децентрализованный фильтр (8)–(12) эквивалентен централизованному (стандартному) фильтру Калмана с моделью измерений (2).

### 3. Децентрализованный квадратно-корневой информационный фильтр

Квадратно-корневой информационный фильтр (SRIF) был впервые предложен в [5]. Ключевая идея заключалась в использовании матричных квадратных корней информационной матрицы, т.е. в представлении  $Y = S^T S$ , где  $S$  – верхний треугольный фактор Холецкого информационной матрицы  $Y$ . Вектор  $s = Sx$  называют квадратно-корневым информационным вектором состояния [3, р. 357]. Алгоритм SRIF получил широкое распространение из-за улучшенных вычислительных свойств по сравнению со стандартной реализацией информационного фильтра [6].

Главная цель данной работы – представить квадратно-корневой информационный алгоритм в децентрализованной форме. Предположим, что на этапах локального прогноза и локального обновления в квадратно-корневом информационном алгоритме [3, р. 359, Table 7.25] вычисляются локальные квадратно-корневые информационные оценки  $\tilde{s}_i(k)$ ,  $\hat{s}_i(k)$  и матричные квадратные корни  $\tilde{S}_i(k)$  и  $\hat{S}_i(k)$ . При построении децентрализованного квадратно-корневого информационного фильтра основная трудность возникает в формулировке этапа коммуникации и ассимиляции. В работе [7] для реализации данного этапа авторы предлагают использовать матричные ортогональные преобразования в комплекснозначной арифметике. Однако такой подход может существенно усложнить программную реализацию алгоритма и замедлить скорость вычислений.

В данной работе мы предлагаем на этапе коммуникации и ассимиляции использовать численно устойчивое  $J$ -ортогональное преобразование вида  $QA = R$ , где матрица преобразования  $Q$  является  $J$ -ортогональной, т.е.  $Q^T J Q = J$ ,  $J$  – сигнатурная матрица вида  $J = (I_p \oplus -I_q)$  ( $p \geq 1, q \geq 1$ ) [8].

Из (4) и (5) следует, что  $\Delta Y_j = \hat{Y}_j(k) - \tilde{Y}_j(k)$  и  $\Delta y_j(k) = \hat{y}_j(k) - \tilde{y}_j(k)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Поскольку в алгоритме SRIF  $Y = S^T S$  и  $s = Sx$ , и при этом  $y = S^T Sx = S^T s$ , то  $\Delta Y_j = \hat{S}_j^T(k)\hat{S}_j(k) - \tilde{S}_j^T(k)\tilde{S}_j(k)$  и  $\Delta y_j(k) = \hat{S}_j^T(k)\hat{s}_j(k) - \tilde{S}_j^T(k)\tilde{s}_j(k)$ . Теперь мы можем записать этап коммуникации и ассимиляции (12) в терминах квадратно-корневого информационного фильтра (обозначим через  $\langle \cdot \rangle_j$  значения вычисляемых на  $j$ -й итерации величин):

*Коммуникация и ассимиляция (в терминах квадратно-корневого информационного фильтра)*

$$I. \text{ Инициализация: } \langle \hat{S}(k) \rangle_0 = \tilde{S}(k), \quad \langle \hat{s}(k) \rangle_0 = \tilde{s}(k).$$

II. Для  $j = 1, 2, \dots, N$  ВЫПОЛНИТЬ:

$$(13) \quad Q_j \begin{bmatrix} \langle \hat{S}(k) \rangle_{j-1} & \langle \hat{s}(k) \rangle_{j-1} \\ \hat{S}_j(k) & \hat{s}_j(k) \\ \tilde{S}_j(k) & \tilde{s}_j(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \hat{S}(k) \rangle_j & \langle \hat{s}(k) \rangle_j \\ 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

где  $\tilde{S}_j(k)$ ,  $\hat{S}_j(k)$  и  $\tilde{s}_j(k)$ ,  $\hat{s}_j(k)$  – квадратные корни информационных матриц и квадратно-корневые информационные оценки вектора состояния, полученные в  $j$ -м узле на этапах локального прогноза и локального обновления с помощью квадратно-корневого информационного алгоритма [3, p. 359, Table 7.25];  $Q_j$  – матрица J-ортогонального преобразования, приводящего первый столбец блочной матрицы в левой части (13) к верхнему треугольному виду, причем  $Q_j^T J Q_j = J$ , где  $J = (I_p \oplus -I_q)$  ( $p = 2n$ ,  $q = n$ ); \* – матричные блоки, не представляющие интерес.

III. ПОЛУЧИТЬ РЕЗУЛЬТАТ:  $\hat{S}(k) = \langle \hat{S}(k) \rangle_N$ ,  $\hat{s}(k) = \langle \hat{s}(k) \rangle_N$ .

Доказательство основано на тождестве  $\mathcal{A}^T Q^T J Q \mathcal{A} = \mathcal{R}^T J \mathcal{R}$ , в котором  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}$  – блочные матрицы левой и правой части уравнения (13).

## 4. Численные эксперименты

Численные эксперименты проведены в системе MATLAB. Рассмотрена дискретная линейная модель кругового движения объекта на плоскости при повороте влево с заданным радиусом [9]. Проведено компьютерное моделирование двух различных вычислительных схем: *централизованной* с использованием информационного и квадратно-корневого информационного фильтров, и *децентрализованной* с использованием предложенного в работе децентрализованного квадратно-корневого информационного алгоритма с двумя вычислительными узлами (в первом измеряется координата  $x$ , а во втором – координата  $y$ ). Численные результаты представлены на рис. 1. Видно, что все оценки совпадают, что подтверждает корректность предложенного алгоритма.

## 5. Результаты

В работе предложен новый децентрализованный квадратно-корневой информационный алгоритм мультисенсорной калмановской фильтрации. Отличием данного алгоритма от предложенных ранее распределенных либо параллельных квадратно-корневых вычислительных схем [7, 10–12] заключается в том, что на этапе ассимиляции квадратно-корневая информационная оценка вектора состояния и соответствующий матричный корень информационной матрицы вычисляются с помощью J-ортогонального преобразования на основе соответствующих величин, получаемых от каждого узла мультисенсорной сети. Предложенный алгоритм может быть использован в децентрализованных вычислительных схемах оценивания вектора состояния динамической системы по данным мультисенсоров. Дальнейшие исследования предполагают разработку численно эффективных алгоритмов параметрической идентификации и адаптивного оценивания в мультисенсорных системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научных проектов № 18-41-732001 и № 18-41-732002.

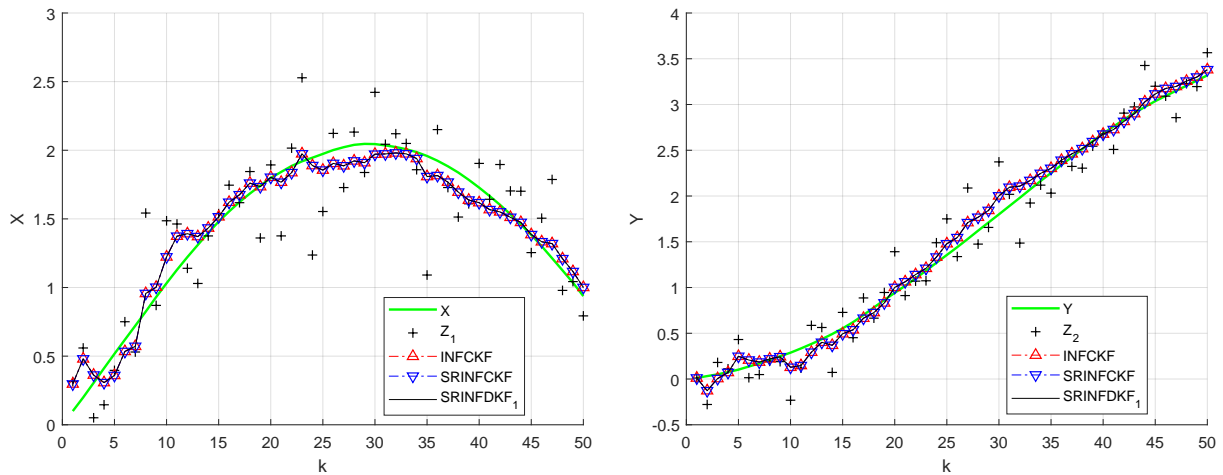


Рис. 1. Оценки координат  $x$  и  $y$ , полученных с помощью алгоритмов: INFCKF – информационный централизованный фильтр Калмана, SRINFCKF – квадратно-корневой информационный централизованный фильтр, SRINFDFK<sub>1</sub> – квадратно-корневой информационный децентрализованный фильтр (в первом узле)

## Список литературы

1. Rao B., Durrant-Whyte H. Fully Decentralized Aalgorithm for Multisensor Kalman Filtering // IEEE Proceedings. 1991. Vol. 138, No. 5. P. 413-420.
2. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic. Eng. 1960. Vol. 82 (Series D). P. 35–45.
3. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB / 4th Edition. John Wiley & Sons, 2015. XVII, 617 p.
4. Hidayat Z., Babuška R., Schutter B. de, Núñez A. Decentralized Kalman Filter Comparison for Distributed-Parameter Systems: A Case Study for 1D Heat Conduction Process // Proceedings of the 16th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA'2011), Toulouse, France. 2011. P. 1-8.
5. Dyer P., McReynolds S. Extension of Square-root Filtering to Include Process Noise // J. Optimiz. Theory Appl. 1969. No. 3. P. 444-459.
6. Kaminski P.G., Bryson A.E., Schmidt S.F. Discrete Square-root Filtering: A Survey of Current Techniques // IEEE Trans. on Automatic Control. 1971. Vol. 16, No. 6. P. 727-735.
7. Roy S., Hashemi R.H., Laub A.J. Square Root Parallel Kalman Filtering Using Reduced-Order Local Filters // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1990. Vol. 27, No. 2. P. 276-289.
8. Higham N.J. J-orthogonal matrices: properties and generalization // SIAM Review. 2003. Vol. 45. No. 3. P. 504-519.
9. Семушин И.В., Цыганов А.В., Цыганова Ю.В., Голубков А.В., Винокуров С.Д. Моделирование и оценивание траектории движущегося объекта // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование», 2017. Т. 10, № 3. С. 108-119.
10. Carlson N.A. Federated Square Root Filter for Decentralized Parallel Processes // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1990. Vol. 26, No. 3. P. 517-525.
11. Morf M., Dobbins J.R., Friedlander B., Kailath T. Square-root Algorithms for Parallel Processing in Optimal Estimation // Automatica. 1979. Vol. 15. P. 299-306.
12. Bierman G.J., Belzer M.R. A Decentralized Square Root Information Filter/Smoothing // Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, FL, USA. 1985. P. 1902-1905.