УДК 681.51

АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ–РАВЕНСТВ

Б.И. Адамов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Россия, 111250, Москва, Красноказаменная ул., 14

E-mail: adamoff.b@yandex.ru

Ключевые слова: адаптивная идентификация параметров, оптимальная идентификация, нелинейные ограничения, линейная параметрическая модель, метод наименьших квадратов, неголономная система.

Аннотация: Доклад посвящен решению задачи адаптивной идентификации параметров объекта, удовлетворяющих нелинейным уравнениям связей. Построены алгоритмы рекуррентной оперативной (*on-line*) параметрической идентификации по методу наименьших квадратов с учетом указанных ограничений на оценки параметров. Представление уравнений связей в дифференциальной форме позволило привлечь для решения задачи некоторые методы неголономной механики: описание движения системы в псевдоскростях, использование принципа наименьшего принуждения Гаусса.

1. Введение

Оперативная идентификация параметров детерминированных систем используются для построения адаптивных алгоритмов управления и позволяют в режиме реального времени получать оценки параметров в меняющихся условиях функционирования системы. Широко распространены методы идентификации с линейной параметрической (идентификационной) моделью исследуемой системы [5–7]. Достоинствами таких алгоритмов являются, в частности, их относительно простая структура. К недостаткам можно отнести иногда возникающую необходимость дополнительного преобразования входных и выходных сигналов для построения параметрической модели.

Настоящий доклад посвящен решению задачи адаптивной идентификации системы с линейной параметрической моделью при условии, что текущие оценки удовлетворяют ограничениям в виде равенств — параметрическим связям.

В [8] приводятся примеры прикладных задач, в которых возникает необходимость оценивания при наличии ограничений; проведен подробный обзор публикаций на указанную тему; а также приводится систематизированная сводка различных алгоритмов получения оценок параметров, удовлетворяющих линейным или нелинейным ограничениям в виде равенств или неравенств. В [8] рассматриваются: методы понижения размерности (редукции) фильтра Калмана, псевдоизмерений, «мягких» связей, проекции оценок и проекции матрицы усиления фильтра Калмана.

Рассмотрим первый из них подробнее. Метод понижения размерности состоит в переходе к таким новым переменным, что часть из них тождественно обращается в ноль в силу уравнений связи, а остальные оцениваются. Аналогичный метод используется в [4] для случая нелинейных уравнений ограничений. Такой подход аналогичен описанию динамики механических систем с неголономными связями в псевдоскоростях [3].

2. Постановка задачи

Пусть линейная параметрическая модель исследуемой динамической системы имеет вид

$$\underset{l\times 1}{y(t)} = N^{\mathrm{T}}(t)\underset{s\times 1}{\vartheta}, \tag{1}$$

где y — l-мерный выходной вектор параметрической модели; N — сигнальная или регрессионная матрица; $t \geqslant 0$ — непрерывное время; $^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования; ϑ — s-мерный вектор неизвестных постоянных параметров, удовлетворяющих независимым уравнениям связей $\psi(\vartheta) = 0$. Здесь ψ — r-мерная $(r+l < s)$ гладкая векторная функция связи.

Требуется разработать алгоритм идентификации параметров модели (1) с ограничениями на вектор оценок параметров $\hat{\vartheta}$ в виде равенств $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ — параметрическими связями.

Представление уравнений связей в дифференциальной форме

$$D_{\psi}^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\vartheta}} = 0, \quad \psi(\hat{\vartheta})\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где D_{ψ}^{T} — матрица Якоби функции связи ψ, позволяет применить для поставленной задачи синтеза аппарат неголономной механики. Для того, чтобы вектор $\dot{\hat{\vartheta}}$ удовлетворял соотношению (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta}) \cdot \dot{\hat{\pi}}, \tag{3}$$

где $\dot{\hat{\pi}}$ — вспомогательный $(s-r)$-мерный вектор с независимыми элементами, а матрица C такова, что $D_{\psi}^{\mathrm{T}}C = 0$. По аналогии с неголономной механикой, будем называть $\dot{\hat{\pi}}$ вектором параметрических *псевдоскоростей* [3].

Таким образом, задача синтеза алгоритма идентификации со связями (2) сведена к построению вектора псевдоскоростей $\dot{\hat{\pi}}$, а вычисление вектора оценок искомых параметров $\hat{\vartheta}$ — к решению уравнения (3).

Отметим, что использование интегрируемых псевдоскоростей, таких что $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$, уменьшает размерность рассматриваемой задачи, поскольку для ее решения потребуется только алгоритм расчета $\dot{\hat{\pi}}$.

3. Пример системы с параметрической связью

Ставится задача идентификации частоты ω установившихся колебаний, описываемых функцией

$$Y(t) = b_0 + b_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t + b_2 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t,$$

где b_k и d_k, $k = \overline{0,2}$ — неизвестные постоянные коэффициенты.

Поставленная задача сводится к идентификации параметров динамического объекта пятого порядка $Y^{(5)}(t) + 5\omega^2 \dddot{Y}(t) + 4\omega^4 \dot{Y}(t) = 0$.

Построим параметрическую модель этого объекта в форме $y = N^{\mathrm{T}}\vartheta + \varepsilon$, не содержащей производных $Y(t)$ по времени. Здесь:

$$y = Y - a_{f4}\overset{(4)}{\mu} - a_{f2}\ddot{\mu} - a_{f0}\mu, \quad N = \begin{pmatrix} \dddot{\mu} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix}, \; \vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{f3} - 5\omega^2 \\ a_{f1} - 4\omega^4 \end{pmatrix};$$

функции $\mu(t)$ и $\varepsilon(t)$ удовлетворяют асимптотически устойчивым дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами a_{fi}:

$$\overset{(5)}{\mu} + a_{f4}\overset{(4)}{\mu} + a_{f3}\dddot{\mu} + a_{f2}\ddot{\mu} + a_{f1}\dot{\mu} + a_{f0}\mu = Y, \quad \overset{(5)}{\varepsilon} + a_{f4}\overset{(4)}{\varepsilon} + \ldots + a_{f0}\varepsilon = 0.$$

Экспоненциально затухающей величиной ε пренебрегаем.

Оцениваемые коэффициенты ϑ_1 и ϑ_2 удовлетворяют уравнению связи

$$\psi(\vartheta) = 25(\vartheta_2 - a_{f1}) + 4(\vartheta_2 - a_{f3})^2 = 0. \tag{4}$$

Выполнение условия $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ позволяет однозначно вычислить оценку частоты $\widehat{\omega}$ по оценкам $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\vartheta}_2$.

В [1] построены градиентные алгоритмы идентификации частоты сигнала $Y(t)$, учитывающие параметрическую связь. Показано, что учет ограничения (4) приводит к скорению сходимости и повышению точности оценок.

4. Алгоритмы идентификации со связями

Построим оценки параметров, удовлетворяющих связям (2), по методу наименьших квадратов (МНК), т.е. из условия минимума функционала

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\| y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{\vartheta}(t) \right\|^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left\| \hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0 \right\|^2_{M_0}. \tag{5}$$

Здесь ϑ_0 — постоянный вектор, $\psi(\vartheta_0) = 0$; $M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная симметричная положительно определенная матрица матрица; $\|\ldots\|^2$ — квадрат евклидова нормы, а $\|\ldots\|^2_{M_0} = (\ldots)^{\mathrm{T}} M_0 (\ldots)$ — квадрат взвешенной евклидовой нормы.

4.1. Оптимальный алгоритм

Для построения оптимального алгоритма продифференцируем по времени условие стационарности функции Лагранжа $J_\lambda = J + \psi^{\mathrm{T}}\lambda = J + \sum_i \lambda_i \psi_i$. Здесь λ — r-мерный вектор неопределенных множителей.

Алгоритм, полученный из необходимых условий минимума функционала J в силу связей (2), имеет вид:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\hat{\pi}} = M_{LSM}^{-1} C^{\mathrm{T}} N e, \qquad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \tag{6}$$

$$\dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \qquad M(0) = M_0, \tag{7}$$

$$\dot{\lambda} = B^{\mathrm{T}} \cdot \left(E - M_\lambda C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C \right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \right) N e, \qquad \lambda(0) = 0, \tag{8}$$

где $e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}$ — вектор ошибок прогноза; $M_{LSM} = C^{\mathrm{T}} M_\lambda C$ — спроецированная матрица Гессе функции Лагранжа J_λ; $M_\lambda = M + \sum_i \lambda_i G_i$; G_i — матрица Гессе i-й скалярной функции связи $\psi_i(\hat{\vartheta})$; B — такая $(s \times r)$-матрица, что $B^{\mathrm{T}} D_\psi = E$. Из-за того, что точки условного и безусловного экстремумов J при $t = 0$ совпадают, здесь используется начальное условие $\lambda(0) = 0$.

Вместе с условием положительной определенности M_{LSM}, уравнения (6)–(8) представляют собой необходимые и достаточные условия строго локального минимума J.

Следует отметить, что $\hat{\vartheta} = \vartheta$ также является точкой безусловного и условного экстремумов и в ней $\lambda = 0$. Однако из-за аддитивных погрешностей параметрической модели (1), при $\hat{\vartheta} \to \vartheta$ множители λ_i могут не затухать до нуля. Также погрешности модели (1) способны так повлиять на поведение λ, что произойдет вырождение M_λ и алгоритм (6)–(8) потеряет работоспособность.

Для парирования этих двух эффектов проведем регуляризацию [2,6,7] уравнения для вектора λ:

$$\dot{\lambda} = A_\lambda \lambda + B^{\mathrm{T}} \cdot \left(E - M_\lambda C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C \right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \right) N e, \tag{9}$$

где A_λ — постоянная гурвицева матрица с «малыми» элементами.

Отметим в завершении, что в размерность системы (6)–(8) не зависит от числа связей r, т.е. их учет не снижает вычислительную сложность алгоритма МНК.

4.2. Субоптимальный алгоритм

Для получения оценок параметров, удовлетворяющих связям (2) преобразуем алгоритм МНК

$$\dot{\hat{\vartheta}} = M^{-1} N e, \quad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \qquad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \quad M(0) = M_0, \tag{10}$$

полученный из условия минимума функционала (5) без учета ограничений (2).

Оценки параметров построим из условия минимума меры принуждения

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \left\| \dot{\hat{\vartheta}} - M^{-1} N e \right\|_M^2$$

по независимым линейным комбинациям компонент вектора $\dot{\hat{\vartheta}}$, удовлетворяющего (2). Здесь $\mathcal{Z}$ является аналогом принуждения по Гауссу [3], а алгоритм (10) — аналогом уравнений движения, освобожденного от связей.

Из условия $(\partial \mathcal{Z} / \partial \dot{\hat{\pi}}) = 0$ следует алгоритм МНК с *проекцией*:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}} M C \right]^{-1} C^{\mathrm{T}} N e. \tag{11}$$

Отсутствие необходимости вычисления неопределенных множителей в алгоритме с проекцией, делает размерность его уравнений меньше, чем у (6)–(8) или (10), а также устраняет один из источников вычислительной неустойчивости.

4.3. О параметрической сходимости полученных алгоритмов

Исследуем сходимость оценок параметров, вырабатываемых в соответствии с алгоритмами (6)–(8) и (11) в малой окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$, считая условия связей линейными. В этом случае уравнения для обоих методов совпадут, а вектор ошибок оценок $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$ может быть представлен в виде $\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}$, где $C_* = C(\vartheta)$, а вспомогательный вектор $\tilde{\pi}$ удовлетворяет системе

$$\dot{\tilde{\pi}} = -\left[C_*^{\mathrm{T}} M C_*\right]^{-1} C_*^{\mathrm{T}} N N^{\mathrm{T}} C_* \tilde{\pi}, \quad \dot{M} = N N^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

Решение уравнения ошибки (12) имеет вид:

$$\tilde{\pi}(t) = \left[C_*^{\mathrm{T}} M(t) C_*\right]^{-1} C_*^{\mathrm{T}} M(0) C_* \tilde{\pi}(0). \tag{13}$$

Для затухания ошибки $\tilde{\pi}$, а, следовательно и $\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}$, достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $C_*^{\mathrm{T}} M(t) C_*$ неограниченно возрастали при $t \to \infty$ [7].

5. Заключение

В настоящей работе построен оптимальный по МНК идентификатор параметров системы с линейной параметрической моделью при наличии ограничений-равенств на искомые величины. Предложен оптимальный алгоритм идентификации с регуляризацией уравнения для неопределенных множителей, позволяющей парировать негативное влияние аддитивных погрешностей параметрической модели на оценки параметров. С помощью принципа наименьшего принуждения получен субоптимальный по МНК алгоритм, отличающийся от оптимального меньшей размерностью уравнений и лучшей вычислительной устойчивостью. При этом в малой окрестности точных значений параметров динамика оценок, вырабатываемых обоими идентификаторами, одинакова. Получены условия параметрической сходимости для построенных алгоритмов в малом.

Список литературы

1. Адамов Б.И. Идентификация параметров динамического объекта при наличии параметрических связей // Навигация и управление движением. Материалы XVII конференции молодых ученых. Санкт-Петербург, 17-20 марта 2015 г. СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор» 2015. С. 497-508.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Адаптивное управление летательным аппаратом с идентификацией на скользящих режимах // Управление большими системами. 2009. № 26. С. 113–144.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 592 С.
4. Calzolari G., Fiorentini G. Constrained Indirect Estimation // The Review of Economic Studies. 2004. Vol. 71, No. 4. P. 945–973.
5. Ioannou P.A., Sun J. Robust Adaptive Control. Mineola, New York: Courier Corporation, 2012. 821 p.
6. Sastry S., Bodson M. Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Mineola, New York: Courier Corporation, 2011. 381 p.
7. Slotine J.J.E., Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991. 461 pp.
8. Simon D. Kalman Filtering with State Constraints: A Survey of Linear and Nonlinear Algorithms // IET Control Theory & Applications. 2010. Vol. 4, No. 8. P. 1303–1318.