УДК 004.94+519.711:681.5

АДАПТИВНЫЙ LD-ФИЛЬТР С АВТОМАТИЧЕСКИМ КОНТРОЛЕМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО МЕТОДУ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА

И.В. Семушин
Ульяновский государственный университет
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42
E-mail: I.V.SemushinRF@ieee.org

Ю.В. Цыганова
Ульяновский государственный университет
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42
E-mail: TsyganovaJV@gmail.com

А.В. Цыганов
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
Россия, 432071, Ульяновск, площадь Ленина, 4/5
E-mail: Andrew.Tsyganov@gmail.com

Ключевые слова: адаптивный фильтр Калмана, автоматический контроль оптимальности фильтра, вспомогательный функционал качества, LD-преобразование.

Аннотация: В работе предложен новый метод автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана, основанный на свойствах численной устойчивости LD-преобразования к ошибкам округления и равенстве нулю градиента вспомогательного функционала качества по параметрам адаптивного фильтра.

1. Введение

Рассмотрим стохастическую систему $\mathfrak{S}(\theta)$, принадлежащую классу дискретных LQG-систем с управлением, заданную выражениями

$$\mathfrak{S}(\theta):\begin{cases} x_t = F(\theta)x_{t-1} + B(\theta)u_{t-1} + G(\theta)w_{t-1}, \quad z_t = H(\theta)x_t + v_t;\\ \bar{x}_0(\theta) \triangleq \mathbb{E}\{x_0\}, \quad \Pi_0(\theta) \triangleq \mathbb{E}\left\{[x_0 - \bar{x}_0(\theta)][x_0 - \bar{x}_0(\theta)]^\top\right\};\\ \mathbb{E}\{w_t\} = 0, \quad \mathbb{E}\left\{w_t w_t^\top\right\} = Q(\theta) \geqslant 0; \quad \mathbb{E}\{v_t\} = 0, \quad \mathbb{E}\left\{v_t v_t^\top\right\} = R(\theta) > 0;\\ t = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

на интервале управления/наблюдения $T_{c|o} = [1\,,\,N]$. Системный векторный параметр $\theta \in \mathbb{R}^p$ принадлежит некоторой области определения $\mathcal{D}(\theta)$. Считаем, что система $\mathfrak{S}(\theta)$ может функционировать в квазистационарном режиме и *номинальному режиму* работы соответствует заданное значение системного параметра $\theta = \theta^*$. Поставим задачу контроля номинального режима функционирования системы. Поскольку вектор состояния x_t не доступен для прямого наблюдения, по данным измерений z_t в каждый дискретный момент времени t можно вычислять оценки $\hat{x}_t$ вектора состояния с помощью алгоритма Калмана [1]. Зная структуру модели системы $\mathfrak{S}(\theta)$, т.е. функциональные зависимости системных матриц от параметра θ, построим адаптивный фильтр $\mathcal{A}_{KF}$ в форме алгоритма Калмана, в котором матрицы-параметры фильтра также зависят от θ. Положим в адаптивном фильтре $\theta = \theta^*$. Тогда при номинальном режиме работы системы адаптивный фильтр $\mathcal{A}_{KF}$ будет оптимальным в среднеквадратическом смысле. При нарушении номинального режима работы системы, т.е. при изменении значения θ в $\mathfrak{S}(\theta)$ фильтр $\mathcal{A}_{KF}$ потеряет свойство оптимальности. Целью задачи контроля является построение специального решающего правила для контроля оптимальности $\mathcal{A}_{KF}$.

В настоящее время существует множество различных подходов к решению задачи контроля [2–5] и др. Согласно [6], в математических методах контроля на основе аналитической избыточности диагностику проводят с помощью проверки различных контрольных соотношений, которым должны удовлетворять промежуточные или окончательные результаты вычислений. Методы аналитической избыточности удобно применять для контроля оптимальности рекуррентных алгоритмов обработки информации, каким и является дискретный фильтр Калмана.

Данная работа предлагает новый метод автоматического контроля номинального режима функционирования системы $\mathfrak{S}(\theta)$, сохраняющий свойства численной устойчивости к ошибкам округления посредством LD-преобразования уравнений дискретной фильтрации и контролирующий близость к нулю градиента вспомогательного функционала качества по параметрам адаптивного фильтра.

2. Метод вспомогательного функционала качества

Метод вспомогательного функционала качества (ВФК) [5] разработан для решения задач идентификации, адаптации и контроля стохастических систем с управлением и фильтрацией. Формируемый ВФК является *инструментальным* показателем качества функционирования системы $\mathfrak{S}(\theta)$, поскольку для него выполнены два важных условия: зависимость только от процессов, доступных для прямого измерения; эквивалентность (в среднеквадратической норме) целей функционирования по исходному (*недоступному*) функционалу качества (ИФК) и по вспомогательному (*доступному*) функционалу качества (ВФК). В основу метода положена задача построить ВФК так, чтобы выполнялось равенство ВФК = ИФК + $const$, гарантирующее совпадение точек минимума для ИФК и ВФК.[1] Условием существования такого ВФК является конструктивное свойство полной наблюдаемости $\mathfrak{S}(\theta)$.

Теорема 1. *[7] Эквимодальность ИФК* $J_e(\theta) \triangleq \mathbb{E}\left\{e_t^\top e_t\right\}$ *и ВФК* $J_\varepsilon(\theta) \triangleq \mathbb{E}\left\{\varepsilon_t^\top \varepsilon_t\right\}$, *т.е. равенство* $\hat{\theta} \triangleq \arg\min_\theta J_\varepsilon(\theta) = \arg\min_\theta J_e(\theta) \triangleq \theta^\star$ *по параметру* $\theta \in \mathcal{D}(\theta) \subset \mathbb{R}^p$ *в некотором компактном множестве* $\mathcal{D}(\theta)$ *обеспечивается, если* $\varepsilon_t \triangleq$

[1] Это свойство названо *эквимодальностью* фукционалов качества [7].

$\varepsilon_t(\theta) = \mathscr{S}(Z_t^{t+Ⓢ-1}) - \hat{x}_t - \mathscr{F}(B)U_t^{t+Ⓢ-1}$, где Ⓢ – максимальный индекс наблюдаемости системы, оценка $\hat{x}_t$ получена от адаптивного фильтра, $\mathscr{S}(\cdot)$ и $\mathscr{F}(\cdot)$ – специальные матричные преобразования [5], составной вектор входных воздействий и составной вектор измерений определены как $U_t^{t+Ⓢ-1} = [u_t^\top | u_{t+2}^\top | \dots | u_{t+Ⓢ-1}^\top]^\top$ и $Z_t^{t+Ⓢ-1} = [\,z_t^\top | z_{t+2}^\top | \dots | z_{t+Ⓢ-1}^\top\,]^\top$; $e_t \triangleq x_t - \hat{x}_t$ – ошибка оценивания вектора состояния.

3. Автоматический контроль оптимальности адаптивного фильтра

Наличие требуемого ВФК позволяет использовать его не только в качестве инструмента идентификации, но и для автоматического контроля оптимальности адаптивного фильтра, а именно: равенство нулю градиента ВФК должно выполняться (с необходимостью и достаточностью) в точке, соответствующей оптимальному значению параметра $\theta^\star$ адаптивного фильтра.

Предположим, что в текущий дискретный момент времени t значение параметра $\theta = \theta^*$. Тогда значение градиента ВФК равно нулю. Если затем в некоторый момент времени t_1 значение модельного параметра θ, соответствующее текущему режиму функционирования системы $\mathfrak{S}(\theta)$, изменится, а в алгоритме адаптивного фильтра значение параметра останется равно $\theta^\star$, тогда значение градиента ВФК будет отлично от нуля с некоторым пороговым значением δ, что свидетельствует о потере оптимальности алгоритма фильтрации.

Эти практические соображения позволяют записать простой критерий оптимальности адаптивного фильтра:

$$\|\nabla_\theta \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, N)\| < \delta, \tag{1}$$

где $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, N) = \dfrac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t^\top(\theta)\varepsilon_t(\theta)$ – вычисляемая оценка ВФК.[2] Тогда

$$\nabla_\theta \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, N) = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} S_t(\theta)\varepsilon_t(\theta), \tag{2}$$

где $S_t(\theta)$ – матрица чувствительностей размера $p \times n$, при этом ее (ij)-й элемент $s_k^{(ij)}(\theta) = \dfrac{\partial \varepsilon_t^{(j)}(\theta)}{\partial \theta_i}$, $i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n$. Запишем выражение для i-го элемента (2):

$$\frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, N)}{\partial \theta_i} = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t^\top(\theta)\frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p. \tag{3}$$

Дифференцируя $\varepsilon_t(\theta)$ по θ_i, получим функции чувствительности

$$\frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial \hat{x}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \mathscr{F}(B)}{\partial \theta_i}U_t^{t+Ⓢ-1}, \quad i = 1, \dots, p. \tag{4}$$

[2] Строгое обоснование выбора порога δ в решающем правиле (1) является предметом дальнейших исследований.

4. Адаптивный LD-фильтр с автоматическим контролем оптимальности

При решении практических задач на ЭВМ всегда нужно учитывать возможное влияние ошибок машинного округления на результаты вычислений. Хорошо известно, что стандартный алгоритм Калмана в этом плане не является численно устойчивым (см. подробное обсуждение в [1, Chapter 7]). Поэтому для повышения численной устойчивости алгоритма автоматического контроля в данной работе предлагается вместо адаптивного фильтра $\mathcal{A}_{KF}$ в форме стандартного алгоритма Калмана использовать его численно устойчивую LD-модификацию, основанную на прямой процедуре модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта [8].

В недавней работе [9] построен численно эффективный алгоритм (см. Алгоритм 3) вычисления градиента ВФК в терминах адаптивного LD-фильтра, дополненного возможностью вычисления функций чувствительности $(\hat{x}_t)'_{\theta_i}$ $(i = 1, \dots, p)$, необходимых для практической реализации (1)–(4). Алгоритм 3 ранее успешно прошел тестирование на задаче идентификации неизвестных параметров математической модели дискретной линейной стохастической системы по данным измерений [9]. Предлагаемый нами метод автоматического контроля оптимальности адаптивного фильтра расширяет функциональность указанного Алгоритма 3.

На рис. 1 приведены результаты компьютерного моделирования дискретной линейной стохастической системы второго порядка [10, Пример 1]. На временном интервале $T_{c|o} = [1\,,\,700]$ в дискретный момент времени $t = 500$ значение системного параметра $\theta = \tau$ меняется с $\tau^\star = 10$ на $\hat{\tau} = 1$. Видно, что решающее правило (1) позволяет практически сразу же обнаружить изменение значения системного параметра.

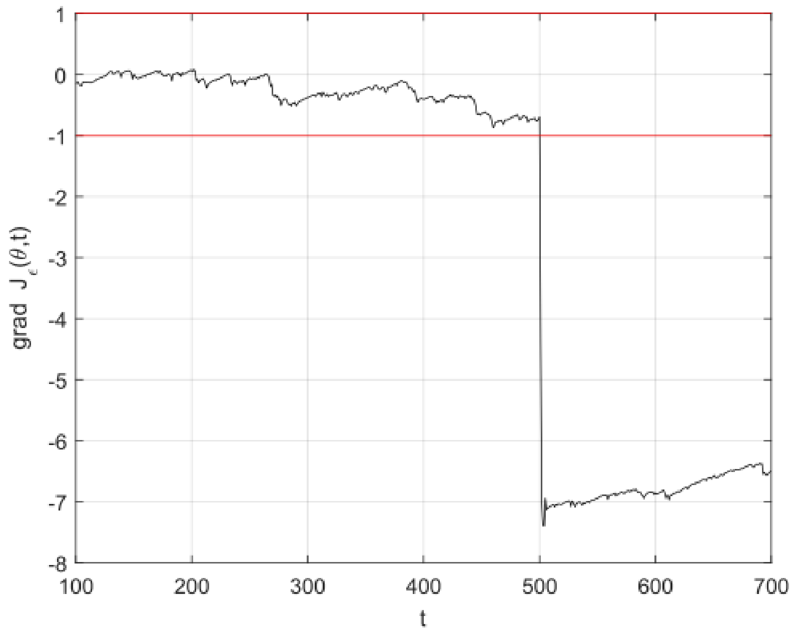

Рис. 1. Значения градиента ВФК до и после изменения значения системного параметра τ в дискретный момент $t = 500$

5. Заключение

В работе предложен новый метод автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана, основанный на свойствах численной устойчивости LD-преобразования к ошибкам округления и равенстве нулю градиента вспомогательного функционала качества по параметрам адаптивного фильтра. Полученное решение обладает следующими преимуществами:

1) выбор структуры адаптивного фильтра в виде LD-алгоритма, дополненного возможностью вычисления функций чувствительности, позволяет существенно снижать влияние ошибок машинного округления на результаты вычислений;

2) применение метода ВФК позволяет контролировать оптимальность адаптивного фильтра по условию равенства нулю градиента ВФК в точке минимума, что соответствует оптимальному значению параметра θ.

3) вычисление градиента ВФК в адаптивном LD-фильтре не требует существенных вычислительных затрат, и такой метод контроля возможно проводить в режиме реального времени.

Результаты этой работы найдут применение при решении задач совместного контроля и идентификации дискретных линейных стохастических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научных проектов № 18-41-732001 и № 18-41-732002.

Список литературы

1. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB. / 4th Edition. John Wiley & Sons, 2015.
2. Бассвиль М., Банвениста А. Обнаружение изменений свойств сигналов и динамических систем. М.: Мир, 1989.
3. Tse L.L. Sequential Analisys : Some Classical Problems and New Challenges // Statistica Sinica, 2001. Vol. 11, No. 1. P. 303-408.
4. Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений / 2-е изд., новое. М.: МЦНМО, 2014.
5. Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения : коллективная монография / И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова, М.В. Куликова и др. Ульяновск: УлГУ, 2011.
6. Голован А.А., Мироновский Л.А. Алгоритмический контроль фильтра Калмана // Автоматика и телемеханика. 1993. № 7. С. 173-185.
7. Semushin I.V. Adaptation in stochastic dynamic systems – Survey and new results II // Int. J. Commun., Network and System Sciences. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 266-285.
8. Цыганова Ю.В., Цыганов А.В. О вычислении значений производных в LD-разложении параметризованных матриц // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2018. Т. 23. С. 64-79.
9. Semushin I.V., Tsyganova J.V., Tsyganov A.V. Numerically Efficient LD-computations for the Auxiliary Performance Index Based Control Optimization under Uncertainties // IFAC Papers-Online. 2018. Vol. 51, No. 32. P. 568-573.
10. Цыганова Ю.В. Вычисление градиента вспомогательного функционала качества в задаче параметрической идентификации стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 142-160.