

УДК 531.36

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ШИНЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЖЕЛАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВЕДУЩИХ КОЛЕС

Т.В. Глазков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1

E-mail: t.glazkov@bk.ru

С.А. Решмин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1

E-mail: reshmin@ipmnet.ru

Ключевые слова: шина, плоские колебания колес, сухое трение, проскальзывание.

Аннотация: Создана упрощенная нелинейная математическая модель шины. Модель учитывает радиальную и крутильную жесткость шины, а также влияние радиальной деформации на крутильную жесткость и наоборот. Результаты планируется использовать при исследовании условий возникновения нежелательных колебаний колес транспортных средств.

1. Введение

Процесс интенсивного разгона транспортного средства не всегда устойчивый. Проскальзывание может вызывать колебания колес в вертикальной плоскости, см., например, видео на интернет-портале YouTube [1]. На рис. 1 изображен трактор К-701 «Кировец» из этого видео. Из-за того, что колеса большие, их колебания имеют достаточно низкую частоту и большую амплитуду, а следовательно, отчетливо видны. Было проведено два пробных старта и видно, что в обоих случаях колебания устойчиво развиваются. Это говорит о том, что нежелательный резонанс изначально заложен в конструкцию этой машины. При этом возможен отрыв колес от поверхности дороги, так что время контакта намного меньше периода колебаний. Аналогичные колебания с частотой менее 10 Гц могут наблюдаться и у автомобилей. Задача заключается в том, чтобы создать относительно простую математическую модель, которая пригодна для моделирования данного явления при разных режимах движения, например, старта [2-4].



Рис. 1. Развитие колебаний колес при проскальзывании у трактора

2. Плоская модель передней стойки и колеса

Плоские колебания колес хорошо описываются упрощенной двухмассовой моделью передней стойки [5]. Предполагаем, что продольные колебания оси колеса относительно корпуса полностью отсутствуют из-за большой жесткости соответствующих элементов подвески (см. рис. 2).

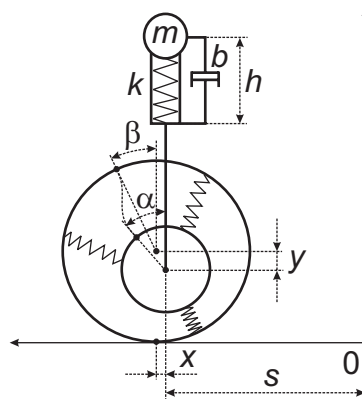


Рис. 2. Плоская модель передней стойки и колеса

Колесо состоит из диска и шины. Шина моделируется внешним невесомым твердым цилиндром, который соединен с диском многочисленными невесомыми пружинами, находящимися в преднатяженном состоянии. Аналогичные допущения о невесомости колес иногда используются при анализе движения автомобилей с учетом трения, например устойчивости и неустойчивости режимов с прямолинейным движением [6, 7]. Диссипацию внутри шины не учитываем.

Основные переменные: s — координата точки касания дороги и колеса, x , y — отклонения по горизонтали и вертикали центра шины от центра диска, α — угол поворота диска переднего колеса, отсчитываемый от вертикали, β — угол поворота протектора шины переднего колеса, отсчитываемый от вертикали, h — длина пружины передней рессоры.

Дополнительные обозначения: m — приведенная масса корпуса, r_a — радиус диска, r_b — радиус шины, m_a — масса диска, I_a — момент инерции диска, k — коэффициент упругости рессоры, k_r — коэффициент радиальной жесткости шины, k_φ — коэффициент крутильной жесткости шины, M — создаваемый двигателем крутящий момент, h_0 — длина пружины рессоры в свободном состоянии, b — коэффициент

демпфирования амортизатора. Параметры системы $m, r_a, r_b, m_a, I_a, k, h_0, b$ постоянны и заданы.

Со стороны диска на внешний цилиндр шины действует радиальная сила

$$(1) \quad F_r = k_r \sqrt{x^2 + y^2},$$

направленная в направлении противоположном ее смещению

$$(2) \quad \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

и крутящий момент

$$(3) \quad M_\varphi = k_\varphi(\alpha - \beta).$$

Так как шина невесомая, то предполагаем, что все силы и моменты сил относительно центра масс, действующие на шину уравновешены в каждый момент времени. Для того чтобы найти силу, с которой цилиндр шины давит на дорогу, спроектируем радиальную силу F_r на горизонтальное и вертикальное направления, умножив (1) на соответствующие компоненты единичного вектора (2). Получим в точке касания

$$(4) \quad F_x = -k_r x, \quad F_y = -k_r y, \quad (y > 0).$$

Из равенства моментов сил $-r_b F_x$ и M_φ , следуют выражения

$$(5) \quad M_\varphi = r_b k_r x, \quad (y > 0).$$

Со стороны дороги на шину действует сила с вертикальной составляющей F_N :

$$(6) \quad F_N = \begin{cases} k_r y, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Иными словами, $F_N = -F_y$ — нормальная реакция в случае касания переднего колеса и дороги, $F_N = 0$ в случае отрыва колеса. Соответствующая сила тяги F имеет вид:

$$(7) \quad F = \begin{cases} f F_N \operatorname{sign}(\dot{\beta} r_b - \dot{s} - \dot{x}), & \text{если } \dot{\beta} r_b - \dot{s} - \dot{x} \neq 0; \\ -\min(|F_x|, f F_N) \operatorname{sign} F_x, & \text{если } \dot{\beta} r_b - \dot{s} - \dot{x} = 0, \end{cases}$$

где f — коэффициент трения, а выражение для F_x дано в (4).

Будем предполагать, что коэффициенты k_r и k_φ (см. (1), (3)) не постоянны, а зависят (в первом приближении) от обобщенных координат следующим образом:

$$(8) \quad k_r = k_r^0 + k_r^\varphi (\alpha - \beta)^2,$$

$$(9) \quad k_\varphi = k_\varphi^0 + k_r^\varphi (x^2 + y^2),$$

где k_r^0, k_r^φ и k_φ^0 — заданные положительные коэффициенты. Из соотношений (8), (9) следует, что коэффициент радиальной жесткости k_r увеличивается при увеличении кручения шины $|\alpha - \beta|$, и наоборот, коэффициент крутильной жесткости k_φ увеличивается при увеличении смещения диска относительно шины $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Уравнения движения

В начальный момент времени $t = 0$ момент M отсутствует, диск, шина и корпус неподвижны и находятся в равновесии, так что

$$(10) \quad y(0) = \frac{(m + m_a)g}{k_r^0}, \quad h(0) = h_0 - \frac{mg}{k}, \quad (g = 9.81),$$

$$s(0) = \dot{s}(0) = x(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{h}(0) = \alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = \beta(0) = \dot{\beta}(0) = 0.$$

Будем рассматривать движение колеса с проскальзыванием. При $t > 0$ управляющий момент задан как функция времени $M(t)$, а положение стойки поддерживается вертикальным. Ради простоты считаем, что положение массы m не изменяется. В этом случае переменные h и s являются вспомогательными, так как h связана с y равенством

$$h - y = h(0) - y(0) = h_0 - \frac{mg}{k} + \frac{(m + m_a)g}{k_r^0},$$

а $s = \dot{s} = 0$, так что выражение для силы тяги (7) упрощается:

$$(11) \quad F = \begin{cases} fF_N \operatorname{sign}(\dot{\beta}r_b - \dot{x}), & \text{если } \dot{\beta}r_b - \dot{x} \neq 0; \\ -\min(|F_x|, fF_N) \operatorname{sign} F_x, & \text{если } \dot{\beta}r_b - \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Составим уравнения Лагранжа, используя в качестве обобщенных координат y , α :

$$(12) \quad m_a \ddot{y} + ky + b\dot{y} - \left(1 + \frac{k}{k_r^0}\right) (m_a + m)g = -F_N, \quad I_a \ddot{\alpha} = M - M_\varphi$$

и проанализируем полученные уравнения в разных режимах, считая α , x , y основными переменными, описывающими динамику.

Утверждение 1. В случае отрыва колеса от дороги, когда $y \leq 0$, имеем $x = F = F_N = M_\varphi = 0$, $\beta = \alpha$. Поэтому уравнения движения (12) принимают наиболее простой вид.

При наличии контакта, когда $y > 0$, ситуация более сложная. Исключая M_φ из (3) и равенства (5), получим:

$$k_\varphi(\alpha - \beta) = r_b k_r x.$$

Подставляя выражение для k_r , получим квадратное уравнение относительно $\alpha - \beta$:

$$(13) \quad r_b k_r^\varphi x (\alpha - \beta)^2 - k_\varphi (\alpha - \beta) + r_b k_r^0 x = 0,$$

решение которого при $x \neq 0$ имеет вид

$$(14) \quad \alpha - \beta = \frac{k_\varphi \pm \sqrt{k_\varphi^2 - 4k_r^\varphi x^2 r_b^2 k_r^0}}{2r_b k_r^\varphi x}.$$

Дискриминант неотрицателен, если

$$k_\varphi - 2|x|r_b \sqrt{k_r^\varphi k_r^0} \geq 0.$$

Подставляя сюда k_φ из (9), получим квадратное неравенство

$$k_r^\varphi |x|^2 - 2|x|r_b \sqrt{k_r^\varphi k_r^0} + k_\varphi^0 + k_r^\varphi y^2 \geq 0,$$

которое может приводить к ограничению на максимально допустимое значение $|x|$:

$$(15) \quad |x| \leq \frac{1}{\sqrt{k_r^\varphi}} \left(r_b \sqrt{k_r^0} - \sqrt{r_b^2 k_r^0 - k_\varphi^0 - k_r^\varphi y^2} \right), \quad \text{если } r_b^2 k_r^0 - k_\varphi^0 - k_r^\varphi y^2 > 0.$$

Зависимость $\alpha - \beta$ от x должна быть непрерывна при $|x| > 0$, а при $|x| \rightarrow 0$ должна стремиться к нулю. Поэтому в решении (14) квадратного уравнения (13) следует выбрать знак минус. В результате имеем непрерывную зависимость:

$$(16) \quad \alpha - \beta = \begin{cases} \frac{k_\varphi - \sqrt{k_\varphi^2 - 4k_r^\varphi x^2 r_b^2 k_r^0}}{2r_b k_r^\varphi x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, переменная β также является вспомогательной, так как она связана с α, x, y формулой (16).

Лемма 1. Пусть параметры системы удовлетворяют ограничению

$$f \leq \sqrt{\frac{k_\varphi^0}{r_b^2 k_r^0 - k_\varphi^0}}, \quad \text{если } r_b^2 k_r^0 - k_\varphi^0 > 0.$$

Тогда условие (15) выполнено во время движения.

4. Заключение

Получена нелинейная система с переменной структурой для моделирования движения колеса с проскальзыванием во время старта и возникновением плоских колебаний. Динамика зависит от управляющего момента, приложенного к колесу.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (18-11-00307).

Список литературы

1. https://www.youtube.com/watch?v=_dYmhH0fLW8.
2. Reshmin S.A. The Effect of Loss of Traction under Asymmetric Vibrations of the Drive Wheels of the Vehicle // Proc. 14th Intern. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference). Moscow, Russia, 2018.
3. Решмин С.А. Качественный анализ нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта // ДАН. 2019. Т. 484, № 3.
4. Решмин С.А. Анализ условий потери тяги транспортного средства при интенсивном старте // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 3.
5. Hao D., Zhao C., Huang Y. A Reduced-Order Model for Active Suppression Control of Vehicle Longitudinal Low-Frequency Vibration // Shock and Vibration. 2018. Article ID 5731347. P. 1-22.
6. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О колебаниях колесного экипажа при наличии трения // ДАН. 2011. Т. 436, № 5. С. 627-630.
7. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О неустойчивости экипажа в вертикальной плоскости при прямолинейном движении с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 3-17.