УДК 517.92+531.8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ УДАРА

С.П. Горбиков
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, 603950, Нижний Новгород, Ильинская ул., 65
E-mail: gorby50@yandex.ru

Ключевые слова: ударные взаимодействия, локальная особенность, бесконечноударные движения.

Аннотация: В настоящей работе предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения динамических систем с ударными взаимодействиями в окрестности локальной особенности шестого типа.

1. Введение

В теории кусочно-гладких динамических систем известны движения, при которых за конечный промежуток времени траектория бесчисленное число раз попадает на многообразие разрыва. Для динамических систем с ударными взаимодействиями, своеобразном классе импульсных систем, это – *бесконечноударные движения* [1, с. 291; 2, 3], т. е. движения с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечный промежуток времени. Для систем управления движением (кусочно-гладких динамических систем с непрерывным изменением переменных) это – режимы с учащающимися переключениями. В общей теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием подобные движения получили название «явление биения». В динамических системах с ударными взаимодействиями такие бесконечноударные движения допускают в ряде случаев [4] описание с помощью гладких дифференциальных уравнений.

В настоящей работе предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения динамических систем с ударными взаимодействиями в окрестности локальной особенности шестого типа [4], т.е. такой точки на гиперповерхности $S=0$ удара, в которой первая и вторая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от уравнения этой гиперповерхности равна нулю, а третья производная – отрицательна (движение системы происходит в области $S>0$). В окрестности локальных особенностей четвертого типа соответствующие дифференциальные уравнения приводятся в [5]. Т.к. область бесконечноударных движений других (образующих) локальных особенностей не содержит [4], то тем самым следует считать завершенным описание этих движений в динамических системах с ударными взаимодействиями.

2. Рассматриваемый класс динамических систем

Принимается следующий общий вид динамической системы с ударными взаимодействиями [5]. Мгновенное ударное взаимодействие происходит на гиперповерхности $x_n = 0$, по достижении которой фазовые переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ меняются скачкообразно (переменная x_n остается равной нулю) согласно формулам

$$
\begin{aligned}
x_1^+ &= H_1(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-, \mu) = x_1^- H_{11}(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-, \mu), \\
x_i^+ &= H_i(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-, \mu) = x_i^- + x_1^- H_{1i}(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-, \mu), \; i = \overline{2, n-1},
\end{aligned} \tag{1}
$$

а при $x_n \geq 0$ изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям

$$
\begin{aligned}
dx_i / dt &= \dot{x}_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n, \mu), \quad i = \overline{1, n-1}, \\
dx_n / dt &= \dot{x}_n = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_n, \mu) + x_n \Phi_{nn}(x_1, \ldots, x_n, \mu).
\end{aligned} \tag{2}
$$

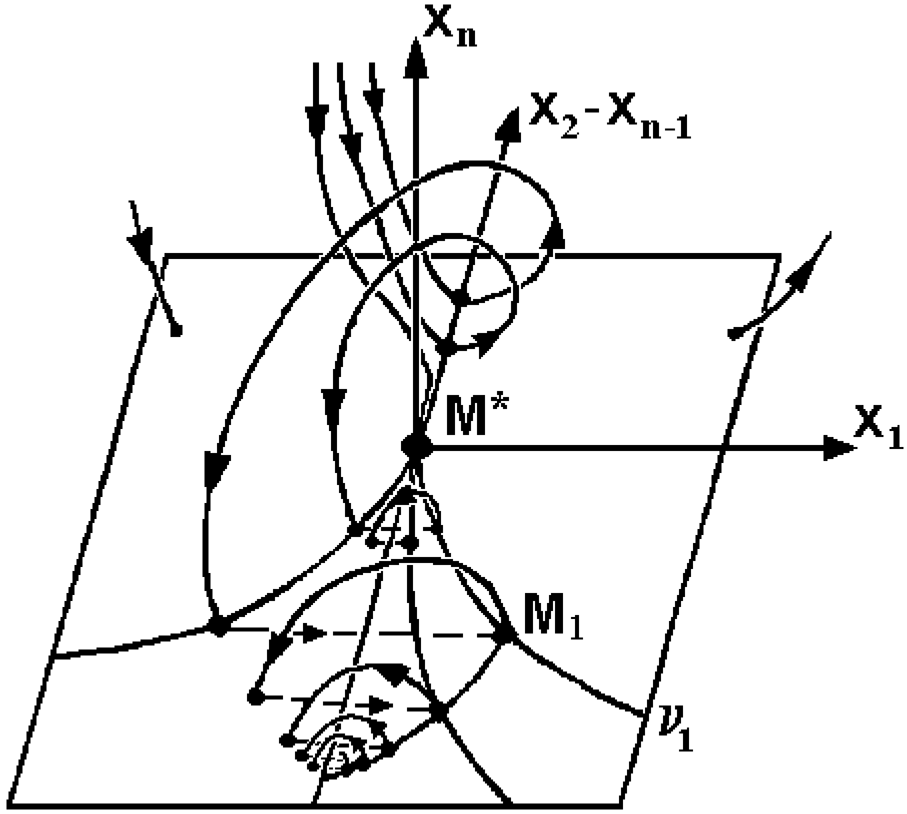
Здесь $x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-$ и $x_1^+, \ldots, x_{n-1}^+$ – соответственно доударные и послеударные значения переменных; μ – параметр системы; t – время. Все указанные функции являются достаточно гладкими. Фазовое пространство системы составляют точки $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \geq 0$.

Предполагается, что в системе существуют локальные особенности, определяемые следующими условиями: $x_n = 0,\ \dot{x}_n = 0,\ \ddot{x}_n = 0\ \dddot{x}_n \leq 0$ (локальные особенности шестого типа).

Для описания поведения фазовых траекторий в малой окрестности указанной выше локальной особенности вводится точечное отображение $T = T_2 T_1$ части многообразия $x_n = 0, x_n \geq 0$ в себя. Отображение T_1 переводит точку $(x_1 \geq 0, x_2, \ldots, x_n = 0)$ в точку $(x_1 \leq 0, x_2, \ldots, x_n = 0)$ по траекториям системы (2); T_2 – отображение, задаваемое формулами (1) ударных взаимодействий.

Предполагается, что точка $M^* = (0,0,\ldots,0)$ как раз и есть локальная особенность шестого типа. Поведение фазовых траекторий системы (1), (2) в окрестности точки M^* показано на рисунке, где сплошными линиями обозначены траектории системы (2), а штриховыми соединены образы точек при отображении (1). На многообразии $x_1 = 0, x_n = 0$ при $x_2 < 0$ располагаются локальные особенности четвертого типа (т.е. точки, удовлетворяющие условиям $x_n = 0,\ \dot{x}_n = 0,\ \ddot{x}_n < 0$).

Кривая v_1 изображает образ многообразия $x_1 = 0, x_n = 0, x_2 \geq 0$ при действии отображения T. Бесконечноударное движение, выходящее из точки M_1 рисунка, оставляет на гиперповерхности удара $x_n = 0$ (при $x_1 > 0$) след (точки $T(M_1), T^2(M_1), T^3(M_1)$, изображенные на рисунке). Через них проходит сплошная линия – траектория дифференциального уравнения, о котором речь пойдет ниже.



3. Особенности качественной структуры фазового пространства

Далее делается замены координат

$$x_1 = y_1 y_2^2, x_i = y_i, i = 2,\ldots,n-1.$$

Тогда отображение T имеет вид

$$\bar{y}_i = q_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), i = 1,\ldots,n-1.$$

Для описания бесконечноударных движений, из которых состоят движения в окрестности точки M^*, доказывается следующая теорема.

Теорема. *Существуют и единственны такие функции* f_i *и такая малая окрестность точки* M^* ($при\ x_1 > 0, x_n = 0$)*, что для любой точки* M *из этой окрестности справедливо следующее:*

все точки $M_j = T_j(M)$, $j = 1,2,3,\ldots$, *лежат на проходящей через* M *интегральной кривой системы дифференциальных уравнений*

$$dy_i / dy_1 = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), i = 2,\ldots,n-1,$$

где $f_i = y_2 \bar{f}_i$ *– гладкие функции.*

Для нахождения $f_i, i = 2,\ldots,n-1,$ составляются функциональные уравнения точно также, как и при доказательстве теоремы в [5]. В данном случае соответствующие функциональные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial q_i}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial q_i}{\partial y_j} f_j = f_i(M_1)[\frac{\partial q_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial q_1}{\partial y_j} f_j], i = 2,\ldots,n-1,$$

где $M_1 = T(M)$, а все участвующие в данном равенстве функции, у которых аргумент не указан, берутся в точке M .

4. Заключение

В результате проведенного исследования предлагается описание движений системы наиболее общего вида, состоящих из ударных движений (разностные уравнения) и безударных движений (дифференциальные уравнения). Такой синтез движений разных типов представляет основную трудность для изучения движений виброударных систем. Эти разнотипные движения чередуются бесчисленное число раз, а описанный здесь результат таких чередований – гладкие дифференциальные уравнения (хотя даже простейшие виброударные системы до сих пор не имеют полного описания).

Список литературы

1. Мак-Миллан В.А. Динамика твердого тела. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951. 467 с.
2. Фейгин М.И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взимодействиями // Прикл. математика и механика. 1967. Вып. 3. С. 533-536.
3. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 160 с.
4. Горбиков С.П. Особенности строения фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 3. С. 23-26.
5. Горбиков С.П., Неймарк Ю.И. Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвуз. сб. Горький. 1981. С. 59-64.