УДК 62.50

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБЩИХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

А.А. Косов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В.М. Матросова

Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134

E-mail: kosov idstu@mail.ru;

М.В. Козлов

Национальныйисследовательский Мордовский гос. университет им. Н. П. Огарева

Россия, 430000, Саранск, Большевистская ул., 68

E-mail: kozlov.mvl@yandex.ru

Ключевые слова: дискретные системы с переключениями, устойчивость, общая функция Ляпунова.

Аннотация: Предлагается алгоритм построения общих функций Ляпунова в виде квадратичных форм или форм четвертой степени для семейств трехмерных переключаемых систем, правые части которых являются линейными функциями или однородными полиномами третьей степени.

В современной теории управления активно изучаются гибридные системы, описываемые уравнениями с переключениями правых частей в ходе процесса управления [1–3]. Наличие переключений существенно затрудняет решение задач анализа динамики и синтеза стабилизирующих управлений, поэтому актуальной задачей является развитие теории управления для такого рода гибридных систем [4]. Основным, а часто и единственным строгим методом исследования динамики гибридных систем обычно выступает метод функций Ляпунова (см., например, [5–8]). Как следует из капитальных обзоров [1–3], наиболее изучены вопросы построения общих квадратичных функций Ляпунова (ОКФЛ) для двумерных линейных дифференциальных систем, дискретные системы и системы более высоких размерностей в этом плане значительно менее изучены. В докладе предлагается алгоритм построения общих функций Ляпунова в виде квадратичных форм или форм четвертой степени для семейств трехмерных переключаемых систем, правые части которых являются линейными функциями или однородными полиномами третьей степени.

Рассмотрим семейство систем следующего вида

$$x(k+1) = A^{(i)}x(k), \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad k \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1}$$

Для этого семейства линейных трехмерных дискретных систем будем строить общую квадратичную функцию Ляпунова в виде $V(x) = x^T Sx$, где симметричная матрица $S = (s_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ зависит от пяти параметров (α, β, d_{12}, d_{13}, d_{23}) следующим образом:

$$
(2)\qquad \begin{cases}
s_{11} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \\
s_{22} = \beta\sqrt{1-\alpha^2}, \quad 0 < \beta < 1, \\
s_{33} = \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}, \\
s_{12} = s_{21} = d_{12}\sqrt{s_{11}s_{22}}, \quad -1 < d_{12} < 1, \\
s_{13} = s_{31} = d_{13}\sqrt{s_{11}s_{33}}, \quad -1 < d_{13} < 1, , \\
s_{23} = s_{32} = d_{23}\sqrt{s_{22}s_{33}}, \quad -1 < d_{23} < 1.
\end{cases}
$$

Матрица S будет положительно определенной при любых значениях параметров из указанных диапазонов при выполнении неравенства

$$
(3)\qquad 1 + 2d_{12}d_{13}d_{23} - d_{12}^2 - d_{13}^2 - d_{23}^2 > 0.
$$

Отметим, что если для семейства (1) существует ОКФЛ, то не ограничивая общности ее можно представить так, чтобы коэффициенты удовлетворяли (2) и (3).

Вычисляя первую разность от $V(x)$ в силу i-той системы семейства (2) получим квадратичную форму

$$
(4)\qquad \Delta V_i(x) = x^T \left[A^{(i)^T} S A^{(i)} - S \right] x.
$$

Проверка отрицательной определенности квадратичных форм (4) проводится с помощью критерия Сильвестра.

Таким образом, алгоритм построения ОКФЛ для семейства (1) заключается в следующем. Разбиваем все пять диапазонов изменения параметров, указанные в (2), сетками из конечного числа точек. Для каждого фиксированного набора значений параметров проверяем неравенства (3) и неравенства критерия Сильвестра для (4). Если все они выполнены, то ОКФЛ построена и задается формулами (2) при текущих значениях параметров. Если же хотя бы одно из упомянутых неравенств нарушено, то переходим к новой точке в пространстве параметров и повторяем все вычисления.

Теперь рассмотрим построение общей функции Ляпунова для семейства (1) в виде формы четвертой степени

$$
(5)\qquad V_4(x) = V_1(x) \cdot V_2(x).
$$

Здесь $V_1(x)$ и $V_2(x)$ — квадратичные формы, коэффициенты которых удовлетворяют (2), (3) и выбираются независимо. Поэтому (5) будет положительно определенной формой четвертой степени от трех переменных. Вычисляя первую разность в силу i-той системы (1), получим форму четвертой степени

$$
\Delta V_4^i(x) = V_4\left(A^{(i)}x\right) - V_4(x).
$$

Алгоритм построения ОФЛ в классе форм 4-ой степени полностью аналогичен описанному выше алгоритму построения ОКФЛ с той лишь разницей, что теперь требуется проводить проверку положительной определенности форм 4-ой степени $W_i = -\Delta V_4^i(x)$. Такую проверку будем выполнять на основе предложенного в [9] перехода к квадратичным формам от большего числа переменных.

Пусть дана форма 4-ой степени от трех переменных

$$
Q_4\left(x_1, x_2, x_3\right) = q_{1111}x_1^4 + q_{1112}x_1^3x_2 + q_{1113}x_1^3x_3 + q_{1122}x_1^2x_2^2 + q_{1123}x_1^2x_2x_3 + q_{1133}x_1^2x_3^2 +
$$

$$+q_{1222}x_1x_2^3+q_{1223}x_1x_2^2x_3+q_{1233}x_1x_2x_3^2+q_{1333}x_1x_3^3+q_{2222}x_2^4+q_{2223}x_2^3x_3+q_{2233}x_2^2x_3^2+ \\ +q_{2333}x_2x_3^3+q_{3333}x_3^4.$$

Введем новые переменные

$$y_1=x_1^2,\quad y_2=x_1x_2,\quad y_3=x_1x_3,\quad y_4=x_2^2,\quad y_5=x_2x_3,\quad y_6=x_3^2.$$

В новых переменных форма $Q_4\,(x_1,x_2,x_3)$ принимает вид квадратичной формы

$$P(y)=q_{1111}y_1^2+q_{1112}y_1y_2+q_{1113}y_1y_3+q_{1122}y_1y_4+q_{1123}y_1y_5+q_{1133}y_1y_6+q_{1222}y_2y_4+ \\ +q_{1223}y_2y_5+q_{1233}y_2y_6+q_{1333}y_3y_6+q_{2222}y_2^2+q_{2223}y_4y_5+q_{2233}y_4y_6+q_{2333}y_5y_6+ \\ +q_{3333}y_6^2=y^TMy.$$

Новые переменные не являются независимыми, они связаны квадратичными равенствами

$$(6)\qquad \begin{cases} y_1y_4-y_2^2\equiv y^TB_1y=0,\\ y_1y_6-y_3^2\equiv y^TB_2y=0,\\ y_4y_6-y_5^2\equiv y^TB_3y=0,\\ y_2y_3-y_1y_5\equiv y^TB_4y=0,\\ y_2y_5-y_3y_4\equiv y^TB_5y=0,\\ y_3y_5-y_2y_6\equiv y^TB_6y=0. \end{cases}$$

Если квадратичная форма $P(y)$ положительно определена при квадратичных условиях (6), то форма 4-ой степени $Q_4(x)$ также положительно определена. Так как на множестве (6) значения квадратичной формы $P(y)$ совпадают со значениями квадратичной формы с матрицей $M+\sum\limits_{j=1}^{6}\lambda_jB_j$ при любых коэффициентах $\lambda_j\in\mathbb{R}$, то тем самым установлена справедливость следующего утверждения

Утверждение 1. *Если для некоторых коэффициентов $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,6}$ линейная комбинация $M+\sum\limits_{j=1}^{6}\lambda_jB_j$ является положительно определенной матрицей, то форма 4-ой степени $Q_4(x)$ положительно определена.*

Таким образом, проверка отрицательной определенности первых разностей в алгоритме построения ОФЛ в виде формы 4-ой степени для семейства (1) сводится к задаче оптимизации в шестимерном пространстве коэффициентов $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,6}$.

Отметим, что предлагаемый здесь подход можно применять и для форм более высоких четных степеней и систем более высокой размерности, однако при этом очень быстро растет размерность получаемой задачи оптимизации.

Пример 1. Рассмотрим уравнения движения пружинно-массовой системы с трением и переключаемой жесткостью пружины

$$(7)\qquad m\ddot z+b\dot z+c^{(j)}z=0$$

Здесь $z(t)$ — положение (координата), m — масса, b — коэффициент трения, c^j, $j=1,2$ — переключаемая жесткость. Пусть $m=b=c^1=1$, $c^2=3.5$. Для системы (7) выполнены необходимые и достаточные условия существования ОКФЛ [10], поэтому общая квадратичная функция Ляпунова при указанных значениях параметров существует. Интегрируя уравнение (7), представленное в нормальной форме, методом Эйлера с шагом $h = 1/8$, получим дискретную систему с переключениями

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \frac{1}{8}\,x_2(k), \\ x_2(k+1) &= -\frac{c^j}{8}\,x_1(k) + \frac{7}{8}\,x_2(k). \end{aligned} \tag{8}$$

Прямым анализом параметрического представления можно показать, что для системы (8) не существует квадратичной функции Ляпунова. Применяя подход, предложенный в разделе 5, получаем общую функцию Ляпунова в виде формы четвертой степени, удовлетворяющую оценкам

$$V(x) = 0.45703x_1^4 + 0.32033x_1^3x_2 + 0.50935x_1^2x_2^2 + 0.19402x_1x_2^3 +$$
$$+0.08203x_2^4 \geqslant 0.54466\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2,$$
$$\Delta V\Big|_{(8)} \leqslant -0.00391V(x).$$

Этот пример демонстрирует два момента. Во-первых, условия существования ОКФЛ для дискретной системы, получаемой численным интегрированием, могут быть существенно более жесткими чем для исходной дифференциальной системы. Во-вторых, применение вместо квадратичных форм более высоких степеней расширяет возможности построения общих функций Ляпунова для дискретных систем.

Пример 2. Рассмотрим семейство из двух дискретных систем

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} x(k), \tag{9}$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} x(k). \tag{10}$$

Применяя предложенный в разделе 5 подход, получаем для семейства (9), (10) ОКФЛ следующего вида

$$V(x) = \frac{7}{8}\,x_1^2 + \frac{12}{53}\,x_1x_3 + \frac{61}{144}\,x_2^2 - \frac{23}{73}\,x_2x_3 + \frac{15}{64}\,x_3^2. \tag{11}$$

Для первых разностей справедливы оценки

$$\begin{aligned} \Delta V\Big|_{(9)} &\leqslant -0.0077||x||^2, \\ \Delta V\Big|_{(10)} &\leqslant -0.0011||x||^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Поэтому нулевое решение системы с переключениями (9) и (10) асимптотически устойчиво при любом режиме переключений.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 19-08-00746)

Список литературы

1. Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C. Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. Vol. 49, No. 4. P. 545-592.
2. Шпилевая О.Я., Котов К.Ю. Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (Обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44, № 5. С. 71-87.
3. Hai Lin, Antsaklis P.J. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results // IEEE Trans. Automat. Contr. 2009. Vol. 54, No. 2. P. 308-322.
4. Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory / Edited by V. D. Blondel & A. Megretski. Princeton, Oxford: Princeton University Press. 2004.
5. Liberzon D. Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhauser. 2003.
6. Васильев С.Н., Косов А.А. Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 27-47.
7. Александров А.Ю., Косов А.А., Чэнь Я. Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 5-17.
8. Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Platonov A.V. On the Asymptotic Stability of Switched Homogeneous Systems // Systems & Control Letters. 2012. Vol. 61, No. 1. P. 127-133.
9. Сиразетдинов Т.К., Аминов А.Б. К задаче построения функций Ляпунова для исследования устойчивости в целом решения систем с полиномиальной правой частью // В кн. «Метод функций Ляпунова и его приложения» / Под ред. Матросова В.М., Васильева С.Н. Новосибирск, Наука. 1981. С. 72-87.
10. Васильев С.Н., Косов А.А. Общие функции Ляпунова и вектор-функции сравнения Матросова в анализе гибридных систем // Тр. X Междунар. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Пленарные доклады. Казань, 12-16 июня 2012 г. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 3-16.