

УДК 517.977

# НАБЛЮДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ЧЕРЕЗ КАНАЛЫ СВЯЗИ ОГРАНИЧЕННОЙ БИТОВОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ

**А.С. Матвеев**

*Санкт Петербургский государственный университет*  
Россия, 198504, Санкт Петербург, Университетский пр., 28  
E-mail: [almat1712@yahoo.com](mailto:almat1712@yahoo.com)

**А.Ю. Погромский**

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий,  
механики и оптики*  
Россия, 197101, Санкт Петербург, Кронверкский пр., 49  
E-mail: [a.pogromski@tue.nl](mailto:a.pogromski@tue.nl)

**Ключевые слова:** задача наблюдения, битовая скорость передачи данных

**Доклад предназначен для специальной сессии, посвященной памяти Г.А. Леонова**

**Аннотация:** Рассматриваются проблемы наблюдения нелинейных детерминированных систем, возможно, с хаотической динамикой через каналы связи ограниченной битовой пропускной способности. Предложен ряд характеристик системы, имеющих смысл минимальной скорости передачи данных через канал, необходимой для того или иного типа наблюдаемости. Развита новая техника конструктивного построения верхних и нижних оценок этих характеристик. Нижние оценки получены в русле метода линеаризации Ляпунова, верхние оценки опираются на идеи его второго метода. Для иллюстрации возможностей развитой теории был рассмотрен ряд классических прототипических детерминированных систем с хаотической динамикой, для которых найдены, либо оценены пороговые значения битовой скорости передачи данных, разделяющие ситуации, когда достоверное наблюдение системы через канал связи возможно и невозможно, соответственно. Установленные достаточные границы скорости передачи данных подкреплены конструктивным построением наблюдателя.

## 1. Введение

Сетевые технологии уже заняли ведущие позиции во многих областях и заслужили репутацию стратегического направления развития систем управления, несущего потенциал технологического прорыва [1-4], а междисциплинарная область сетевых систем управления длительное время лежит в фокусе интенсивных академических и практических исследований. Здесь одно из ключевых направлений связано с преодолением специфических проблем, вытекающих из определяющей черты сетевой системы - деления ее ресурсов между множественными пользователями. Среди этих проблем - ненадежное, нерегулярное или лимитированное обслуживание, задержки в каналах связи, нерегулярности передачи, потери пакетов, квантование данных, ограниченная битовая скорость передачи и др.

В алгоритмическом аспекте вытекающие отсюда потребности были осознаны на рубеже тысячелетий как необходимость ориентированной на сетевые системы новой главы теории управления, в которой вопросы управления, коммуникации и вычислений изучаются в единстве. В этой области, подобно классической теории информации Шеннона, фундаментальный вопрос касается наименьшей битовой скорости передачи данных, которая требуется для достижения определенной цели управления для заданного объекта. Предшествующие исследования этой характеристики в основном развивались, особенно в нелинейной постановке, в идейном поле общей теории нелинейной динамики и динамического хаоса [3, 5-9] и в разных постановках предложили ответы, родственные классической топологической энтропии (ТЭ), которая служит традиционной мерой хаоса, неопределенности и сложности динамической системы. Это также касается специализированных и мотивированных задачами управления концепций энтропии, которые например, учитывают неопределенности динамики системы [8], эффекты от применения обратной связи [6] или мотивированы ориентацией на достижение конкретных динамических свойств, таких как инвариантность [10] или ее аналогов [11-14]. Вместе с тем на почве и с позиций управления ТЭ и ее аналоги характеризуются рядом проблемных моментов, которые обостряются тем, что реалии последнего времени переносят их из академических областей интересов математиков и физиков в сторону повседневной инженерной практики.

Одна из этих проблем связана с практической вычислимостью. В отличие от линейного случая, вычисление и точное оценивание обсуждаемых и введенных ранее пороговых значений скорости канала связи является сложной задачей для нелинейных систем. Это иллюстрирует тот факт, что их значения до сих пор неизвестны даже для многих прототипических детерминированных хаотических систем малой размерности. Указанное обстоятельство созвучно строгим математическим фактам: хотя для систем малой размерности, особенно, размерности единица, и специальных систем разработаны эффективные методы [14-23], имеются строго доказанные результаты о невычислимости для более сложных систем [24-27]. Другая проблема связана с тем, что имея в качестве истоков идеи классической нелинейной динамики, предложенные концепции индифферентны к ряду важных и специфичных для управления вопросов, например, к возможности защитить достигнутое качество наблюдения от критической деградации в будущем или улучшить его. В третьих, остались не исследованы возможности ряда направлений повышения дееспособности результатов и методов, которые были обнаружены и подтвердили свою эффективность в теории управления. В качестве примера укажем на изучение системы в форме взаимодействующих подсистем с входами и выходами: такая форма распространена на практике и целые главы теории управления посвящены системам в этой форме. Среди них теория абсолютной устойчивости и робастного управления, где обратная связь обычно связывает номинальную модель системы с блоком, моделирующим динамические неопределенности. Наконец, оптимизация алгоритмов управления по отношению к потребляемым ресурсам канала связи (например, битовой скорости канала) в нелинейном случае представляет собой обширное поле в основном открытое для дальнейших исследований.

## **2. Оценивание пороговых значений битовой скорости передачи данных через канал связи**

В докладе представлено развитие техники конструктивного построения неквадратичных функций Ляпунова для нелинейных систем, идейно и технически опирающейся на методические подходы Г.А. Леонова в теории размерности странных аттракторов

[28-31] и разработанной авторами доклада в [32-36]. Ранее ее потенциал был продемонстрирован серией новых критериев частотной синхронизации и глобальной устойчивости колебаний в нелинейных системах с внешним входом, а также обоснованием асимптотической устойчивости линейных нестационарных систем с настойчивым возбуждением (persistent excitation), а также стабилизации через каналы связи с потерями данных.

Основные технические моменты и идеи этого подхода развиты в технологию конструктивного оценивания интенсивности информационного обмена, необходимого и достаточного для наблюдения/стабилизации систем с нелинейной, нестационарной и возможно, хаотической динамикой по данным, поступающим от сенсора по каналу связи с ограниченной битовой скоростью передачи. В фокусе исследования - достоверное оценивание в реальном времени состояния системы в связи с установленной ранее концентрацией ключевых аспектов проблематики на вопросах оценивания.

Фундаментальный вопрос данной области касается минимальной скорости передачи данных, при которой возможно достижение цели. В этой связи предложены авторские характеристики динамической системы, имеющие смысл скорости передачи данных, необходимой и достаточной для решения задачи с защитой однажды достигнутого качества от критической деградации, либо с улучшением качества. Разработана их общая теория для систем как в евклидовом фазовом пространстве, так и на римановом многообразии; в частности, изучена их связь с ТЭ и классическими инструментами нелинейной динамики. Разработана технология конструктивного оценивания этих характеристик. Оценки снизу получены в русле первого метода Ляпунова, однако в отличие от распространенного в исследованиях ТЭ асимптотического анализа вдоль траекторий системы они апеллируют к анализу положений равновесия. От большинства теоретических работ, посвященных оценкам и вычислению ТЭ, которые в основном лежат в идейном поле первого метода Ляпунова, развиваемый подход отличается ориентацией на второй (прямой) метод Ляпунова в связи с верхними оценками; для этого уже охарактеризованные методы синтеза неквадратичных функций Ляпунова развиты в соответствующем направлении. Дееспособность развитой технологии оценивания и определенный уровень ее завершенности продемонстрирована точным вычислением предложенных характеристик в алгебраической форме для ряда классических хаотических систем: логистического отображения, отображений Хенона и Лози, отображения Чирикова и др. При этом показано, что вычисленные характеристики непрерывны по параметрам системы. В общем случае установленные достаточные границы скорости передачи данных подкреплены разработкой конструктивных алгоритмов дистанционного оценивания состояния системы через канал связи, скорость которого превосходит эту границу. Принципиальное отличие этих алгоритмов от предшествующих работ по наблюдению/управлению на основе квантованных данных - ориентация на экономное использование ресурсов канала.

### 3. Заключение

В докладе предложены характеристики динамической системы, имеющие смысл скорости передачи данных, необходимой и достаточной для решения задачи наблюдения с защитой однажды достигнутого качества от критической деградации, либо с улучшением качества. Разработана их общая теория и методы оценивания. Их дееспособность продемонстрирована вычислением предложенных характеристик для ряда классических хаотических систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-08-00715).

## Список литературы

1. Antsaklis P., Baillieul J. Special issue on the technology of networked control systems // Proceedings of the IEEE. 2007. Vol. 95, No. 1.
2. Mahmoud M.S. Control and Estimation Methods over Communication Networks. Heidelberg: Springer, 2014. 517 p.
3. Matveev A.S., Savkin A.V. Estimation and Control over Communication Networks. Boston: Birkhauser, 2009. 533 p.
4. Yuksel S., Basar T. Stochastic Networked Control Systems: Stabilization and Optimization under Information Constraints. Boston: Birkhauser, 2013. 421 p.
5. Liberzon D., Hespanha J.P. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. Vol. 50, No. 6. P. 910-915.
6. Nair G.R., Evans R.J., Mareels I., Moran W. Topological feedback entropy and nonlinear stabilization // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. Vol. 49, No. 9. P. 1585-1597.
7. Nair G.R., Fagnani F., Zampieri S., Evans R.J. Feedback control under data rate constraints: an overview // Proceedings of the IEEE. 2007. Vol. 95, No. 1. P. 108-137.
8. Savkin A.V. Analysis and synthesis of networked control systems: topological entropy, observability, robustness, and optimal control // Automatica. 2006. Vol. 42. No. 1. P. 51-62.
9. De Persis C., Isidori A. Stabilizability by state feedback implies stabilizability by encoded state feedback // Systems and Control Letters. 2004. Vol. 53. P. 249-258.
10. Colonius F., Kawan C. Invariance entropy for control systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2009. Vol. 48. No. 3. P. 1701-1721.
11. Colonius F., C. Kawan C. Invariance entropy for outputs // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2011. Vol. 22, No. 3. P. 203-227.
12. Colonius F., Kawan C., Nair G. A note on topological feedback entropy and invariance entropy // Systems & Control Letters. 2013. Vol. 62. No. 5. P. 377-381.
13. Hagihara R., Nair G. Two extensions of topological feedback entropy // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2013. Vol. 25, No. 4. P. 473-490.
14. Kawan C. Invariance entropy of control sets // SIAM Journal on Control and Optimization. 2011. Vol. 49, No. 2. P. 732-751.
15. Alsedra L., Llibre J., Misiurewicz M. Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One. Singapore: World Scientific, 2000. 432 p.
16. Amigo J.M., Gimenez A. A simplified algorithm for the topological entropy of multimodal maps // Entropy. 2014. Vol. 16. P. 627-644.
17. de Melo W., van Strien S. One-Dimensional Dynamics. NY: Springer, 1993. 581 p.
18. Donarowicz T. Entropy in Dynamical Systems. NY: Cambridge University Press, 2011. 404 p.
19. Milnor J., Thurston W. On iterated maps of the interval // In: J.C. Alexander, editor / Dynamical Systems, Lectures Notes in Mathematics. 1988. Vol. 1342. P. 465-563.
20. Colonius F. Minimal bit rates and entropy for exponential stabilization // SIAM Journal on Control and Optimization. 2012. Vol. 50, No. 5. P. 2988-3010.
21. Kawan C. Lower bounds for the strict invariance entropy // Nonlinearity. 2011. Vol. 24, No. 7. P. 1910-1936.
22. Kawan C. Upper and lower estimates for invariance entropy // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2011. Vol. 30, No. 1. P. 169-186.
23. Da Silva A., Kawan C. Invariance entropy of hyperbolic control sets // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2016. Vol. 36, No. 1. P. 97-136.
24. Delvenne J.C., Blondel V.D. Quasi-periodic configurations and undecidable dynamics for tilings, infinite words and Turing machines // Theoretical Computer Science. 2004. Vol. 319. P. 127-143.
25. Hurd L.P., Kari J., Culik K. The topological entropy of cellular automata is uncomputable // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1992. Vol. 12. P. 255-265.
26. Koiran P. The topological entropy of iterated piecewise a-ne maps is uncomputable // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2001. Vol. 4, No. 2. P. 351-356.
27. Simonsen J.G. On the computability of the topological entropy of subshifts // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Sciences. 2006. Vol. 8. P. 83-96.

28. Бойченко В.А., Леонов Г.А. Прямой метод Ляпунова в оценках топологической энтропии // Записки научных семинаров ПОМИ, Исследования по топологии. 1995. Т. 231. № 4. С. 62-75.
29. Boichenko V.A., Leonov G.A., Reitman V. Dimension theory for ordinary differential equations. Wiesbaden, Germany: Teubner Verlag, 2005. 443 p
30. Леонов Г.А. Об оценках хаусдорфовой размерности аттракторов // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1991. Вып. 3. С. 41-44.
31. Леонов Г.А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. СПб: Издательство СПбГУ. 2004. 144 с.
32. Pogromsky A.Y., Matveev A.S. A non-quadratic criterion for stability of forced oscillations// Systems and Control Letters. 2013. Vol. 62, No. 5. P. 408-412.
33. Pogromsky A.Y., Matveev A.S. Stability analysis via averaging functions // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 61, No. 4. P. 1081-1086.
34. Pogromsky A.Y., Matveev A.S. Stability analysis of PE systems via Steklov's averaging technique // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2017. Vol. 31, No. 1. P. 138-144.
35. Pogromsky A.Y., Matveev A.S., Andrievsky B.R., Leonov G.A., Kuzetsov N.V. A non-quadratic criterion for stability of forced oscillations and its application to flight control // Proceedings of the 2013 European Control Conference. Zurich, Switzerland. 2013. P. 4293-4298
36. Pogromsky A.Y., Matveev A.S., Chaillet A., Ruffer B. Input-dependent stability analysis of systems with saturation in feedback // Proceedings of the 52<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control. Florence, Italy. 2013. P. 5903-5908.