УДК 330.42

ТОЧКА ФЕРМА – ТОРРИЧЕЛЛИ И ЕЕ ОКРЕСТНОСТИ

П.А. Панов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Россия, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20

E-mail: panovpeter@mail.ru

А.В. Савватеев

Кавказский математический центр АГУ

Россия 385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208

E-mail: hibiny@mail.ru

Ключевые слова: геометрическая медиана, минимизация, градиентная система, треугольная область.

Аннотация: Геометрическая медиана плоской области — это точка, минимизирующая среднее расстояние от самой себя до всех точек этой области. Здесь мы выпишем некоторую градиентную систему для вычисления геометрической медианы треугольной области и сформулируем наглядное характеристическое свойство этой медианы. Оно заключается в том, что три средних расстояния от геометрической медианы до трех сторон границы треугольной области равны между собой. Дальше эти результаты обобщаются на другие виды областей, а также на другие медианоподобные точки.

1. Введение

Геометрическая медиана является естественным пространственным обобщением статистической медианы одномерной выборки, которая, как известно, минимизирует суммарное расстояние до всех элементов выборки. Именно это минимизирующее свойство положено в основу определения геометрической медианы m конечного набора точек $P_1, \ldots, P_n$ на плоскости

$$m = \arg\min_{X \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} |P_i - X|. \qquad (1)$$

Геометрическая медиана трехточечного множества P_1, P_2, P_3 называется *точкой Ферма – Торричелли* этого множества [1].

С XIX века геометрическая медиана и ее непосредственные обобщения начинают активно использоваться в экономической науке [2, 3]. Параллельно продолжают исследоваться математические свойства дискретной медианы, а позже начинают разрабатываться эффективные численные методы для ее вычисления [4]. Ближе к концу прошлого века интерес смещается в сторону непрерывного случая — развиваются исследования, связанные с геометрическими медианами непрерывных объектов [5].

В своем изложении мы как раз и сосредоточимся на таком непрерывном случае. Мы начинаем с описания вида градиентной системы для нахождения геометрической медианы треугольной области (Теорема 1). Эта система позволяет получить простое и компактное характеристическое свойство геометрической медианы треугольной области (Предложение 1). Дальше эти результаты обобщаются на другие виды областей, а также на другие медианоподобные точки.

Представленные здесь результаты являются развитием результатов, полученных в статье [6], которая, в свою очередь, была мотивирована работой [7].

2. Градиентная система

Напомним, что по аналогии с дискретным случаем (1) геометрическая медиана m области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ определяется как

$$m = \arg\min_{X\in\mathbb{R}^2} \int_{P\in\Omega} |P - X|\, dP, \tag{2}$$

где $|P - X|$ — это обычное евклидово расстояние между точками P и X. После введения обозначения

$$\Sigma_\Omega(X) = \int_{P\in\Omega} |P - X|\, dP \tag{3}$$

то же самое определение можно записать короче

$$m = \arg\min_{X\in\mathbb{R}^2} \Sigma_\Omega(X). \tag{4}$$

Нам понадобится еще одно одно обозначение. Пусть P_1 и P_2 — некоторые точки на плоскости, тогда

$$\Sigma_{P_1P_2}(X) = \int_{P\in P_1P_2} |P - X|\, dP,$$

где интегрирование ведется по отрезку P_1P_2. Заметим, что среднее расстояние от точки X до точек отрезка P_1P_2 имеет вид $\Sigma_{P_1P_2}(X)/|P_2 - P_1|$. Теперь приступим к формулировке первого результата.

Теорема 1. *Точка m тогда и только будет геометрической медианой треугольной области Δ с вершинами P_1, P_2, P_3, когда выполняется равенство*

$$\frac{\Sigma_{P_1P_2}(m)}{|P_2 - P_1|}\,\overrightarrow{P_1P_2} + \frac{\Sigma_{P_2P_3}(m)}{|P_3 - P_2|}\,\overrightarrow{P_2P_3} + \frac{\Sigma_{P_3P_1}(m)}{|P_1 - P_3|}\,\overrightarrow{P_3P_1} = 0. \tag{5}$$

Замечание 1. *На самом деле расположенный слева вектор — это градиент функции $\Sigma_\Delta(X)$, повернутый на $-90°$, так что уравнение (5) — это, действительно, градиентная система.*

Градиентную систему (5) можно записать в более компактном и симметричном виде. Из Теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1 (Характеристическое свойство геометрической медианы треугольной области)**.** *Точка m тогда и только тогда будет геометрической медианой треугольной области Δ с вершинами P_1, P_2, P_3, когда*

$$\frac{\Sigma_{P_1P_2}(m)}{|P_2-P_1|} = \frac{\Sigma_{P_2P_3}(m)}{|P_3-P_2|} = \frac{\Sigma_{P_3P_1}(m)}{|P_1-P_3|}. \tag{6}$$

Таким образом геометрическая медиана треугольной области — это точка, для которой три средних расстояния до трех сторон граничного треугольника равны между собой.

Отметим, что все интегралы вида $\Sigma_{PQ}(X)$, присутствующие в градиентных системах (5) и (6), вычисляются в конечном виде, подынтегральная функция тут — это квадратный корень из квадратного трехчлена. Таким образом, геометрическая медиана — это общий ноль двух элементарных функций. Тем не менее, аналитическая формула конечного вида для нее, по-видимому, неизвестна. Во всяком случае среди 30 000 центров треугольников, перечисленных в энциклопедии [8], геометрическая медиана треугольной области отсутствует. Заметим, что эта энциклопедия постоянно пополняется и, кроме того, она снабжена проверочными инструментами, позволяющими выяснить, принадлежит ли ей данная точка или нет.

3. Обобщения

Естественным обобщением Теоремы 1 является следующее утверждение.

Предложение 2. *Точка m тогда и только будет геометрической медианой многоугольной области Π с вершинами $P_1, \ldots, P_n$, когда выполняется равенство*

$$\frac{\Sigma_{P_1P_2}(m)}{|P_2-P_1|}\,\overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + \frac{\Sigma_{P_nP_{n+1}}(m)}{|P_{n+1}-P_n|}\,\overrightarrow{P_nP_{n+1}} = 0.$$

Откуда, в свою очередь, с помощью интегрального перехода получаем

Предложение 3. *Пусть задана плоская ограниченная область Ω с кусочно гладкой границей. Точка m тогда и только будет ее геометрической медианой, когда выполняется равенство*

$$\int_{P\in\partial\Omega} |P-m|\,\overrightarrow{dP} = 0.$$

Ну и, наконец, с плоскости переместимся в n-мерное пространство.

Теорема 2. *Пусть Ω — это ограниченная область с кусочно гладкой границей, расположенная в пространстве $\mathbb{R}^n$. Точка m тогда и только будет ее геометрической медианой, когда выполняется равенство*

$$\int_{P\in\partial\Omega} |P-m|\,\overrightarrow{n(P)}\,dP = 0,$$

где $\overrightarrow{n(P)}$ — это единичный вектор внешней нормали к границе области Ω в точке P.

Очевидно, что все предыдущие утверждения являются простыми частными случаями этой теоремы.

Завершим наше изложение еще одним результатом. Часто, во многих экономических приложениях, вместо геометрической медианы области Ω, которая является критической точкой функции Σ_Ω, определенной соотношением (3), приходится работать с критическими точками более общих функций вида

$$\Sigma_\Omega^f(X) = \int_{P\in\Omega} f(P-X)\,dP,$$

где f — это некоторая функция аргумента $P \in \mathbb{R}^n$. Здесь имеет место следующий общий результат, который покрывает все предыдущие.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна и Ω — это ограниченная область с кусочно гладкой границей, расположенная в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда для функции Σ_Ω^f условие критичности точки m равносильно выполнению следующего равенства*

$$\int_{P\in\partial\Omega} f(P-m)\,\overrightarrow{n(P)}\,dP = 0,$$

где $\overrightarrow{n(P)}$ — это единичный вектор внешней нормали к границе области Ω в точке P.

Список литературы

1. Fermat-Torricelli problem. *Encyclopedia of Mathematics.* https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Fermat-Torricelli_problem
2. Launhardt W. Theorie der Kommerziellen Trassierung der Verkehrswege // Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieurvereins. Hannover. 1872. Vol. 18. Z. 522.
3. Weber A. Über den Standort der Industrien. 1.Teil: Reine Theorie des Standorts. 2. Auflage. Tübingen, 1909
4. Wesolowsky G.O. The Weber Problem: History and Perspectives // Location Sciense, 1993. No. 1. P. 5-23.
5. Fekete S.P., Mitchell J.S.B., Beurer K. On the Continuous Fermat-Weber Problem // Operations Research. 2005. Vol. 53, No. 1. P. 61-76
6. Панов П.А. О геометрической медиане выпуклых, а также треугольных и других многоугольных областей // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2018. Т. 26. С. 62-75.
7. Панов П.А. Равновесные расположения центров благ по городу // Журнал Новой экономической ассоциации. 2017. № 1 (33), С. 28-42.
8. Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/