УДК 519.83

МЕХАНИЗМ ОБРАТНЫХ ПРИОРИТЕТОВ В ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА ПРИ ЗАВИСИМОСТИ КОЛИЧЕСТВА РЕСУРСА ОТ СПРОСА

Л.В. Россихина
ФКОУ ВО Воронежский институт ФСИН России
Россия, 394072, Воронеж, Иркутская ул., 1а
E-mail: rossihina_lv@mail.ru

К.Е. Амелина
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1

В.А. Пономарев
ФКОУ ВО Воронежский институт ФСИН России
Россия, 394072, Воронеж, Иркутская ул., 1 а

Ключевые слова: задача распределения ресурса, механизм обратных приоритетов, равновесие Нэша, потребитель, приоритет.

Аннотация: Рассмотрен механизм обратных приоритетов в задаче распределения ресурса при условии, что количество распределяемого ресурса зависит от спроса, то есть от суммы заявок потребителей. Представлены частный случай задачи для двух потребителей и общий случай с числом потребителей больше двух с одинаковыми и различными приоритетами. Исследована кусочно-постоянная зависимость количества распределяемого ресурса от спроса для частного и общего случаев. Получен общий вывод, что при применении механизма обратных приоритетов в случаях, когда количество ресурса зависит от спроса, возможно трудно предсказуемое поведение потребителей, включая резкие скачки оценок.

1. Введение

Механизм обратных приоритетов исследовался для случая, когда количество ресурса либо задано [1-6], либо задана функция распределения количества ресурса [7-9]. В ряде случаев количество распределяемого ресурса зависит от спроса, то есть от суммы заявок. Например, если спрос $S = \sum_i S_i$ превышает количество ресурса R, то Центр может увеличить это количество, добавляя ресурс прямо пропорционально дефициту $\Delta = S - R$, то есть распределяемое количество ресурса

(1) $$R(S) = R + k(S - R),$$

где $0 < k < 1$

Другой пример связан с распределением ресурса в трехуровневой системе распределения ресурса (рис. 1).

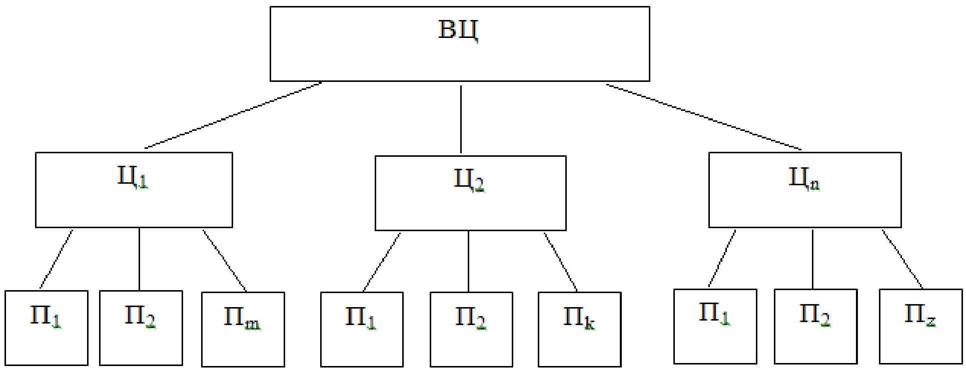

Рис. 1. Трехуровневая система распределения ресурса.

Каждый потребитель $П_{ij}$ подает свою заявку S_{ij} в свой Центр $Ц_i$. Центр $Ц_i$ суммирует заявки и подает суммарную заявку $S_i = \sum_j S_{ij}$ в Центр верхнего уровня (ВЦ). ВЦ распределяет ресурс по Центрам, применяя механизм прямых приоритетов, то есть прямо пропорционально заявкам S_i, то есть количество ресурса X_i, получаемого $Ц_i$ равно $X_i = \frac{S_i \cdot R}{\sum_j S_j}$, где R – ресурс Центра верхнего уровня.

При большом числе Центров справедлива гипотеза слабого влияния, согласно которой Центры не учитывают влияния своей заявки на параметр $k = \frac{R}{\sum_j S_j}$.

Поэтому при распределении ресурса между потребителями каждый Центр полагает ресурс равным

(2) $$R(S) = kS, k < 1.$$

В [10] проведен анализ механизма обратных приоритетов при зависимостях (1) и (2).

Представляет интерес рассмотреть кусочно-постоянную зависимость количества ресурсов от спроса (рис. 2), ($R_1 < R_2$).

$$R(S) = \begin{cases} R_1, S < Q, \\ R_2, S \geq Q. \end{cases}$$

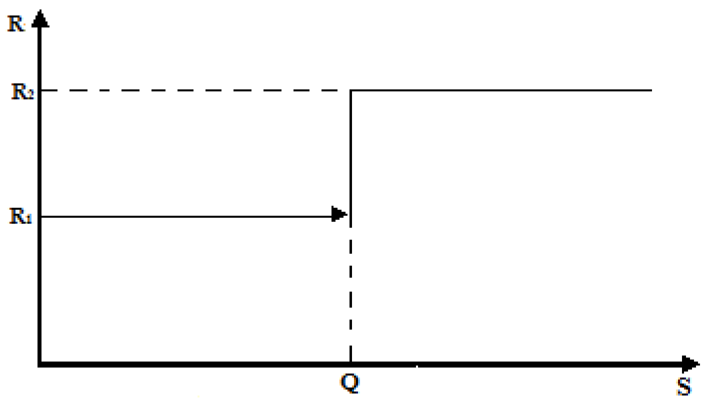

Рис. 2. График зависимости количества ресурса от спроса

2. Механизм обратных приоритетов в задачах распределения ресурса при кусочно-постоянной зависимости количества ресурса от спроса

2.1. Случай двух потребителей с одинаковыми приоритетами

Замети, что если $R_2 = R_1$, то существует единственное равновесие $S_1 = S_2 = \frac{R_1}{2}$.

Если $Q \leq R_1$, то ситуация $S_1 = S_2 = \frac{R_2}{2}$ – единственное равновесие, что достаточно очевидно.

Пусть $R_2 \geq Q > R_1$. Определим условия, при которых любому потребителю (например, первому) выгодно сообщить

(3) $$S_1 \geq Q - \frac{R_1}{2} = a$$

с тем, чтобы обеспечить уровень ресурса R_2. Сообщая S_1 равное (3), первый потребитель получает $x_1 = R_2 - \frac{R_1}{2} > \frac{R_1}{2}$, то есть выигрывает.

Однако на следующей итерации второй потребитель сообщает S_2 из условия $S_2 = \frac{R_2 a}{a + S_2}$.

Решая это уравнение, получим $x_2 = S_2 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4R_2}{a}} - 1\right)$, а первый $x_1 = R_2 - x_2$.

Суммарное количество ресурса первого потребителя за две итерации составит

(4) $$R_2 - \frac{R_1}{2} + R_2 - \frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4R_2}{a}} - 1\right).$$

Если эта величина больше, чем R_1, то стратегия (4) выгодна, в противном случае нет.

Нетрудно показать, что (4) возрастающая функция R_2, причем при больших R_2 это выражение больше чем R_1, а при малых – меньше. Поэтому существует R_2^* такое, что (4) равно R_1. Если $R_2 < R_2^*$, то первому потребителю не выгодна стратегия (3). В этом случае получаем ситуацию равновесия, которая называется «равновесием в безопасных стратегиях». Если $R_2 > R_2^*$, то стратегия (3) выгодна первому потребителю.

Пусть $Q > R_2$ (рис. 2). В этом случае для того, чтобы ресурс был равен R_2 необходимо $S_1 + S_2 = Q$ или $S_1 = Q - S_2$.

Имеем $x_1 = \frac{R_2 \cdot \frac{R_1}{2}}{Q} = \frac{R_1 R_2}{2Q} < \frac{R_1}{2}$.

Таким образом, стратегия $S_1 = Q - S_2$ не выгодна потребителю и ситуация $S_1 = S_2 = \frac{R_1}{2}$ является равновесной.

Рассмотрим ситуацию, когда $S_1 = S_2 = \frac{Q}{2}$, $x_1 = x_2 = \frac{R}{2}$. Может ли первый потребитель получить больше $\frac{R_2}{2}$, сообщая $S_1 < \frac{Q}{2}$.

Имеем $x_1 = S_1 = \frac{R_1 \cdot \frac{Q}{2}}{S_1 + \frac{Q}{2}} = \frac{R_1 Q}{2S_1 + Q}$, решая это уравнение, получаем $x_1 = S_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{Q^2 + 8R_1 Q} - Q\right)$.

Получим условия, при которых $S_1 < \frac{R_2}{2}$ или $Q^2 + 8R_1 Q < (R_2 + Q)^2$.

Имеем $R_2^2 + 2R_2 Q = 8R_1 Q$, $R_2^* = \sqrt{Q^2 + 8R_1 Q} - Q$.

Таким образом, при $R_2 > R_2^*$ ситуация $S_1 = S_2 = \frac{Q}{2}$ является равновесием Нэша.

2.2. Случай с числом потребителей больше двух и одинаковыми приоритетами

Если $Q \leq R_1$, то как и ранее $S_i = \frac{R_2}{n}$, $i = \overline{1,n}$ – единственная ситуация равновесия.

Если $R_1^* < Q < R_2$, то ситуация $S_i = \frac{R_1}{n}$, $i = \overline{1,n}$ уже не является равновесием, поскольку любой потребитель i, сообщая оценку $S_i = Q - \frac{(n-1)}{n} R_1$ обеспечивает себе количество ресурса $x_i = R_2 - \frac{(n-1)}{n} R_1 > \frac{R_1}{n}$.

Получаем условия, при которых ситуация $S_i = \frac{R_1}{n}$, $i = \overline{1,n}$ является равновесием в безопасных стратегиях при сообщении i-ым потребителем оценки $\left(Q - \frac{(n-1)}{n} R_1\right)$ каждый j-ый потребитель сообщает оценку S_j, удовлетворяющую уравнению $S_j = \frac{R_2}{1+S_j Y(i)}$.

Проводя анализ аналогично предыдущему случаю, получаем аналогичные результаты. А именно существует уровень R_2^*, выше которого получаем ситуацию равновесия Нэша, при которой либо $S = R_2$ (если $R_2 \geq Q$), либо $S = Q$ (если $R_2 \leq Q$).

2.3. Случай с числом потребителей больше двух и различными приоритетами

Не приводя довольно громоздких вычислений, отметим главное.

Существуют три типа равновесий.

1. Равновесие Нэша при $S = R_2$.
2. Равновесие в безопасных стратегиях $S = R_1$.
3. Равновесие Нэша при $S = Q$.

Конкретный вид определяется соотношением R_1, R_2, Q, а также в ряде случаев приоритетами A_i, $i = \overline{1,n}$

3. Заключение

Общий вывод: при применении механизма обратных приоритетов в случаях, когда количество ресурса зависит от спроса, возможно трудно предсказуемое поведение потребителе, включая резкие скачки оценок.

Поэтому рекомендуется в таком случае применять механизм абсолютных приоритетов $x_i = \min\left(S_i; \gamma\sqrt{A_i}\right)$, где γ определяется из условия $\sum_i x_i = R(S)$.

Список литературы

1. Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. М.: Ин-т проблем управления, 1997. 61 с.
2. Бурков В.Н., Гуевский И.В., Нанева Т.Б., Опойев В.И., Пончев И.П., Цветанов И.П. Распределение водных ресурсов // Автоматика и телемеханика. 1980. № 1. С. 81-90.
3. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. Mechanism design and management : mathematical methods for smart organizations / Ed. by D. Novikov. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2013.

5. Korgin N. A., Korepanov V. O. Experimental and theoretical comparison of several resource allocation mechanisms // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 15592-15597.
6. Korgin N. A., Korepanov V. O. Experimental Gaming Comparison of Resource Allocation Rules in Case of Transferable Utilities // International Game Theory Review. 2017. Vol. 19, No 2. P. 175000-1 - 175000-11.
7. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Фокин С.Н. Распределение ресурсов в условиях неопределенности // Вопросы радиоэлектроники. 1983. Вып. 6. С. 62-71.
8. Буркова И.В., Горошко И.В., Пономарев В.А., Россихина Л.В. Вероятностное распределение ресурсов // Материалы Одиннадцатой Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2018)». М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2018. С. 494-496.
9. Буркова И.В., Пономарев В.А., Россихина Л.В., Китиков В.О., Фокин С.Н. Механизмы распределения ресурсов при вероятностной неопределенности // Доклады Восьмой Международной научной конференции «Танаевские чтения». Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2018. С. 43-47.
10. Бурков В.Н., Пономарев В.А., Амелина К.Е. Механизм обратных приоритетов в распределении ресурсов // Материалы Международной научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в инженерных и бизнес-приложениях». Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2018. С. 10-19.