

УДК 531.01

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОДХОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ КАЧЕНИЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Ю.В. Морозов**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [tot1983@inbox.ru](mailto:tot1983@inbox.ru)

**И.В. Матросов**

*ООО Джавад джи Эн Эс эс*

Россия, 117997, Москва, Чапаевский пер., 3

E-mail: [matrossov@gmail.com](mailto:matrossov@gmail.com)

**А.В. Пестерев**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [alexanderpesterев.ap@gmail.com](mailto:alexanderpesterев.ap@gmail.com)

**Ключевые слова:** уравнения Лагранжа, линеаризация обратной связью, управление, регуляризация вычислений, качение твердого тела.

**Аннотация:** В работе предлагается новый подход к задаче численного интегрирования уравнений движения, описывающих качение тяжелого колеса с маятником по кривой без проскальзывания на длительных интервалах времени. В рамках данного подхода неизвестные силы реакции, действующие на систему, трактуются как управления, а алгебраические уравнения, которым должны удовлетворять реакции, как цели управления.

## 1. Введение

Для практических приложений важное значение имеет задача качения по неровной поверхности шара с закрепленным на его оси маятником. Интерес к этой задаче обусловлен поиском новых движителей для простых роботизированных систем, а ее решение известно только для некоторых специальных случаев поверхностей качения. Частным случаем данной задачи является качение тяжелого колеса с закрепленным на его оси маятником по криволинейному профилю. Основная трудность решения задачи качения связана с тем, что сила реакции и момент, действующие на колесо в точке касания, заранее неизвестны и должны быть определены из некоторых алгебраических соотношений, следующих из дополнительных предположений о характере

качения [1]. В статье предлагается подход к решению задачи качения, обеспечивающий регуляризацию в процессе счета и, тем самым, позволяющий получить численное решение задачи на больших интервалах времени с предельно высокой точностью.

## 2. Качение обруча по допустимой кривой

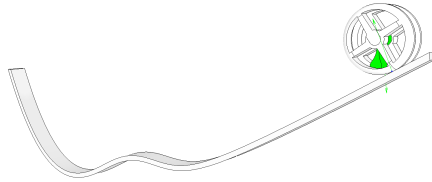


Рис. 1. Тяжелое колесо, катящееся по криволинейному желобу.

Для простоты изложения, рассмотрим сначала задачу качения тяжелого обруча массы  $M$  и радиуса  $r$  по кривой [2] (рис. 1). Пусть  $x$  и  $z$  обозначают координаты центра обруча относительно горизонтальной и вертикальной осей неподвижной системы координат, соответственно, а  $\theta$  – угол поворота обруча вокруг центра. После освобождения от связей уравнения движения обруча могут быть записаны в виде [2]

$$(1) \quad M\ddot{x} = R_x, \quad M\ddot{z} = -Mg + R_z, \quad Mr^2\ddot{\theta} = Q,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $R = (R_x, R_z)$  – сила реакции опоры и  $Q$  – вращающий момент относительно центра масс. Уравнения (1) не могут быть проинтегрированы непосредственно, так как сила реакции и момент неизвестны. Для их нахождения требуется выписать (алгебраические) соотношения, следующие из дополнительных, сформулированных ниже предположений о характере качения.

Пусть кривая, по которой катится обруч, задана неявно уравнением  $f(x, z) = 0$ . Будем предполагать, что кривая является допустимой для данного обруча, т.е. кривизна кривой в любой точке меньше  $1/r$ , и что обруч не теряет контакта с кривой. В силу допустимости кривой последнее означает, что в любой момент времени обруч касается кривой в единственной точке. Введем обозначение  $\alpha$  для угла между вектором, направленным из центра обруча в точку касания, и осью  $x$ . Через  $x_a$  и  $z_a$  обозначим координаты точки на кривой, в которой она касается обруча. Из предположения о качении без отрыва и допустимости кривой следует, что  $x_a = x + r \cos \alpha$ ,  $z_a = z + r \sin \alpha$

$$(2) \quad f(x_a, z_a) = 0.$$

В силу того, что центр обруча лежит, очевидно, на нормали к кривой в точке касания, справедливо соотношение

$$(3) \quad f'_x(x_a, z_a) \sin \alpha - f'_z(x_a, z_a) \cos \alpha = 0.$$

Далее, предположим, что обруч движется без проскальзывания, что эквивалентно выполнению условия

$$(4) \quad \dot{x}_a^2 + \dot{z}_a^2 - (r\dot{\theta})^2 - (r\dot{\alpha})^2 = 0.$$

При сделанных предположениях правые части системы (1) должны быть таковы, чтобы на решениях уравнений (1) выполнялись соотношения (2)–(4). Указанных трех алгебраических уравнений недостаточно для определения правых частей исходной системы, так как они содержат дополнительную переменную  $\alpha$ . Поэтому, предположим также, что система консервативна и добавим к ним условие сохранения энергии

$$(5) \quad E - E_0 = 0, \quad E = M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)/2 + Mr^2\dot{\theta}^2/2 + Mgz,$$

где  $E_0$  – полная энергия системы в начальный момент времени. По аналогии с переменными  $x$  и  $z$  будем искать  $\alpha$  как решение дифференциального уравнения второго порядка

$$(6) \quad \ddot{\alpha} = U,$$

где  $U$  – неизвестная величина, которая, наряду с  $R_x, R_z, Q$ , подлежит определению из условий (2)–(5). Итак, рассматриваемая задача о качении без проскальзывания обруча по кривой сводится к решению системы алгебро-дифференциальных уравнений (1)–(6), или, другими словами, к решению системы дифференциальных уравнений (1), (6) на многообразии, определяемом условиями (2)–(5).

Для решения указанной задачи воспользуемся предложенным в [3] подходом, в рамках которого стоящие в правых частях дифференциальных уравнений неизвестные величины трактуются как управления, а условия (2)–(5) – как цели управления, при этом область определения уравнений движения расширяется на некоторую окрестность многообразия. С этой целью вводятся новые переменные – невязки уравнений (2)–(5):  $\delta_1 = f(x_a, z_a)$ ,  $\delta_2 = f'_x(x_a, z_a) \sin \alpha - f'_z(x_a, z_a) \cos \alpha$ ,  $\delta_3 = \dot{x}_a^2 + \dot{z}_a^2 - (r\dot{\theta})^2 - (r\dot{\alpha})^2$ ,  $\delta_4 = E - E_0$ , для которых строятся линейные дифференциальные уравнения. Порядок каждого дифференциального уравнения выбирается так, чтобы старшая производная невязки явно зависела от искомым  $R_x, R_z, Q$  и  $U$ , а коэффициенты уравнения обеспечивали экспоненциальное убывание невязки. Непосредственным дифференцированием невязок легко убедиться, что требуемым условиям удовлетворяют следующие уравнения:

$$(7) \quad \ddot{\delta}_1 = -2\lambda_1\dot{\delta}_1 - \lambda_1^2\delta_1, \quad \ddot{\delta}_2 = -2\lambda_2\dot{\delta}_2 - \lambda_2^2\delta_2, \quad \dot{\delta}_3 = -\lambda_3\delta_3, \quad \dot{\delta}_4 = -\lambda_4\delta_4,$$

где  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$  (выбор коэффициентов из однопараметрического семейства в двух первых уравнениях сделан для удобства обозначений; в общем случае оба (положительных) коэффициента могут выбираться независимо друг от друга).

Дифференцируя выражения, определяющие невязки, и подставляя полученные выражения для производных в уравнения (7), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно “управлений”  $R_x, R_z, Q$  и  $U$ . Решая ее аналитически, находим “управления” как функции переменных состояния (“обратные связи”). Подставляя их в (1), (6), получаем замкнутую, разрешенную относительно старших производных систему дифференциальных уравнений, которая решается численно. Найденные таким образом “обратные связи” обеспечивают экспоненциальное убывание невязок, вызванных ошибками численного интегрирования и, тем самым, регуляризацию решения в процессе счета.

### 3. Качение тяжелого колеса с маятником по допустимой кривой

Пусть теперь на оси колеса подвешен маятник с массой  $m$  и длиной  $l$ ,  $l < r$ . В качестве переменных состояния системы возьмем те же переменные  $x, z, \theta$  и угол  $\phi$ , определяющий положение маятника относительно колеса. Уравнения движения системы в форме Лагранжа имеют вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= R_x, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} &= R_z - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= -\frac{\partial U}{\partial \phi}, \end{aligned}$$

где  $T = T_1 + T_2$  и  $U = U_1 + U_2$  – кинетическая и потенциальная энергии системы,

$$(9) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}^2, \\ T_2 &= \frac{1}{2}m((\dot{x} + l\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\dot{z} + l\dot{\phi}\sin\phi)^2) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2, \\ U_1 &= Mgz, \quad U_2 = mg(z - l\cos\phi), \end{aligned}$$

Предполагая качение без отрыва и без проскальзывания, получаем те же, что и в предыдущем случае, алгебраические уравнения (2)–(4), к которым добавляется условие сохранения полной энергии  $E = T + U$  и дифференциальное уравнение (6) относительно дополнительной переменной  $\alpha$ . Полученная система уравнений решается точно также, как и в предыдущем случае.

В численных примерах рассматривалась система со следующими значениями параметров:  $M = 1$ ,  $m = 0.5M$ ,  $r = 0.01$ ,  $l = 0.8r$ . Решалась задача качения колеса (как с маятником, так и без маятника) по кривой заданной уравнением  $z = x^4 + ax^3 - bx^2 - ax - (1 - b)$ ,  $a = 0.13$ ,  $b = 0.5$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  на длительных интервалах времени (в приведенных иллюстрациях – 1800 с). Численное интегрирование проводилось с помощью разработанной И.В. Матросовым программы DExpert.

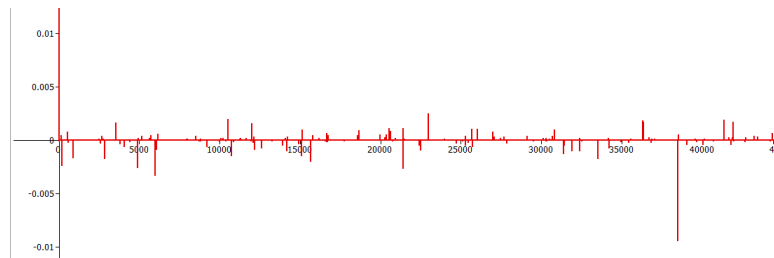


Рис. 2. График функции  $E(t) - E(0)$

Рис. 2 показывает зависимость полной энергии колеса с маятником от времени и иллюстрирует регуляризующие свойства предлагаемого метода: вызванные ошибками численного счета невязки полной энергии быстро (экспоненциально) обнуляются, так что полная энергия системы остается неизменной. Регуляризация достигается с помощью “обратных связей”  $R_x$ ,  $R_z$ ,  $Q$  и  $U$ , зависящих от ошибок счета. В качестве иллюстрации на рис. 3 показаны проекции вектор-функций  $[R_x(t), x(t)]$  и  $[R_z(t), x(t)]$

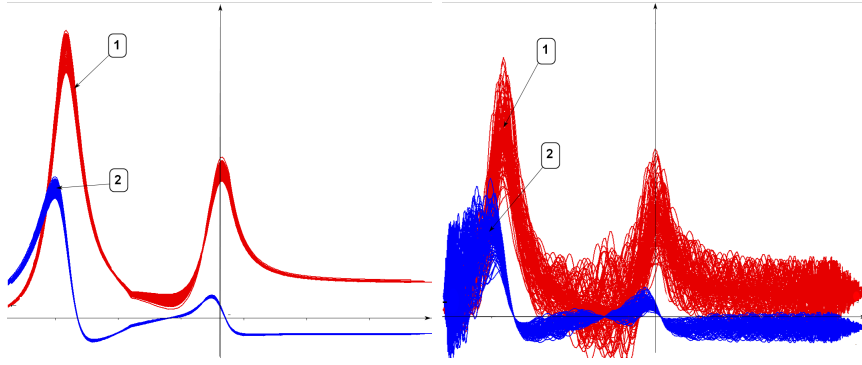


Рис. 3. По горизонтали  $x(t)$ , по вертикали  $R_x(t)$  (1) и  $R_z(t)$  (2) для случая качения колеса без маятника (слева) и с маятником (справа).

на плоскости  $(x, R_x)$ ,  $(x, R_z)$  для случаев без маятника (слева) и с маятником (справа). Для случая без маятника в отсутствии ошибок интегрирования кривые  $R_x(t)$ ,  $R_z(t)$  и  $x(t)$  являются периодическими функциями времени и, при проектировании на указанные плоскости мы бы имели  $n$  совпадающих кривых, где  $n = T/\tau$ ,  $T$  – время интегрирования и  $\tau$  – время прохождения желоба. Наличие ошибок интегрирования, однако, нарушает периодичность и мы видим на рисунке пучок близких кривых (левый рисунок). В случае колеса с маятником периодичность, вообще говоря, отсутствует. Тем не менее, на длительных промежутках времени видны основные составляющие сил реакции, аналогичные случаю без маятника.

## 4. Заключение

Предложен метод численного решения задачи качения по криволинейной поверхности, обеспечивающий регуляризацию в процессе счета и позволяющий получить решение задачи на больших интервалах времени с высокой точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-08-00531) и Программы № 29 Президиума РАН "Актуальные проблемы робототехнических систем".

## Список литературы

1. Ylikorpi T.J., Forsman P.J., Halme A.J. Dynamic obstacle overcoming capability of pendulum driven ball-shaped robots // 17th IASTED Inter. Conf. Robot. Appl. (RA 2014). 2014. P. 329-338.
2. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 216 с.
3. Матросов И.В. О единственности справа решений невырожденных алгебродифференциальных уравнений с разрывами // Автоматика и телемеханика. 2007. № 1. С. 11-19.