УДК 517.977.2

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ШАГОМ

Б.Ы. Аширбаев
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова
Кыргызстан, 720044, Бишкек, пр. Ч. Айтматова, 66
E-mail: ashirbaev-58@mail.ru

Ключевые слова: малый шаг дискретизации, матрица простой структуры, разностный оператор, инвариантные подпространства.

Аннотация: В статье предложен способ декомпозиции дискретной управляемой системы с малым шагом. Эквивалентная система, полученная при полном разделении переменных состояния дискретной управляемой системы с малым шагом, обладает всеми свойствами исходной системы. Она состоит из двух подсистем низкого порядка, решения которых находится независимо, причем они связаны только управляющей функцией.

1. Введение

При решении задач управления объектами из различных областей науки и техники возникают сложности, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием нескольких временных масштабов. В связи с этим актуальной является задача декомпозиция моделей.

Проблема разделения движений в управляемых системах рассматривались многими авторами, среди них можно отметить работы [1-3].

В отличие от указанных работ, в данной работе метод разделения движений рассматривается в дискретной управляемой системе с малым шагом.

Предлагаемый подход сочетает в себе приемы асимптотических и приближенных методов анализа.

2. Вывод формулы задачи

Рассмотрим задачу разделения уравнений динамики дискретной управляемой системы с малым шагом

(1) $$y(t+\mu) = A(t)y(t) + B(t)u(t),$$

где:

$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, x(t), z(t) - n -$ мерные векторы переменных состояния,

$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}, A_i(t)\ (i = \overline{1,4}) - (n \times n), B_1(t), B_2(t) -$ $(n \times r)$- матрицы, $u(t) - r -$мерный вектор управления,

$t \in T_\mu = \{t\colon\ t = k\mu,\ \ k = 0,\ 1, \cdots, M-1\} \subset T = \{t\colon 0 \le t \le 1\}, M = \frac{1}{\mu},$

$0 < \mu \ll 1$ −малый шаг дискретизации.

Начальные и конечные условия определяются соотношениями:

(2) $y(0) = y_0$,

(3) $y(M) = y_M$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

a) матрица $A(0)$ является матрицей простой структуры и она не имеет нулевого собственного значения;

b) все собственные значения λ_i $(i = \overline{1,n})$ матрицы $A(0)$ удовлетворяют условию $|\lambda_i| < q_0 < 1$.

При выполнении условии a) и b) в системе (1) производим разделение переменных, для этого, введем замену переменных [2]:

(4) $z(t) = \tilde{z}(t) + H(t)x(t)$,

(5) $x(t) = \tilde{x}(t) - N(t)\tilde{z}(t)$,

где матрицы $H = H(t), N = N(t)$ размера $(n \times n)$ и будут определены через параметры системы (1). Тогда из (4) и (5) будем иметь соотношения:

(6) $$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix},$$

(7) $$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение

(8) $$D(t) = \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix},$$

тогда

(9) $$D^{-1}(t) = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix}.$$

Так как $y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$, то соотношения (6) и (7) соответственно записываются в виде

(10) $y(t) = D(t) \cdot \tilde{y}(t),\ \tilde{y}(t) = D^{-1}(t) \cdot y(t)$.

Применив разностный оператор $\Delta_\mu y(t) = \frac{y(t+\mu) - y(t)}{\mu}$ и его свойства, к обеим частям первого соотношения (10) имеем [3]

(11) $\Delta_\mu y(t) = \left[\Delta_\mu D(t)\right] \cdot \tilde{y}(t) + D(t+\mu) \cdot \left[\Delta_\mu \tilde{y}(t)\right]$.

С учетом (10), (11) система (1) записывается в виде

$$\mu\left[\Delta_\mu D(t)\right] \cdot \tilde{y}(t) + \mu D(t+\mu) \cdot \left[\Delta_\mu \tilde{y}(t)\right] = (A(t) - E_{2n})D(t)\tilde{y}(t) + B(t)u(t)$$

или

(12) $\tilde{y}(t+\mu) = D^{-1}(t+\mu)A(t)D(t)\tilde{y}(t) + D^{-1}(t+\mu)B(t)u(t)$.

Пусть матрицы $H(t)$ и $N(t)$ удовлетворяют уравнениям:

(13) $H(t+\mu)\tilde{A}_1(t) - A_4(t)H(t) - A_3(t) = 0$,

(14) $-\tilde{A}_1(t)N(t) + N(t+\mu)\tilde{A}_4(t) + A_2(t) = 0$,

где

(15) $\tilde{A}_1(t) = A_1(t) + A_2(t)H(t),\ \widetilde{A}_4(t) = A_4(t) - H(t+\mu)A_2(t)$,

тогда уравнение (12) записывается в форме

(16) $$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t+\mu) \\ \tilde{z}(t+\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1(t) & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1(t) \\ \tilde{B}_2(t) \end{pmatrix} u(t),$$

здесь

(17) $\tilde{B}_1(t) = B_1(t) + N(t+\mu)\tilde{B}_2(t),\ \tilde{B}_2(t) = B_2 - H(t+\mu)B_1(t)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* a, b *и матрицы* $H(t)$, $N(t)$ *являются решениями уравнений (13) и (14), тогда систему (1) можно разделить на две подсистемы низкого порядка:*

(18) $$\tilde{x}(t+\mu) = \tilde{A}_1(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1(t)u(t),$$

(19) $$\tilde{z}(t+\mu) = \tilde{A}_4(t)\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2(t)u(t).$$

Граничные условия уравнений (18) и (19) определяются соотношениями:

(20) $$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0,\ \tilde{x}(M) = \tilde{x}_M,\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0,\ \tilde{z}(M) = \tilde{z}_M,$$
$$\tilde{x}_0 = x_0 + N(0)\tilde{z}_0,\ \ \tilde{x}_M = x_M + N(M\mu)\tilde{z}_M,$$
$$\tilde{z}_0 = z_0 - H(0)x_0,\ \ \tilde{z}_M = z_M - H(M\mu)x_M.$$

Системы (18) и (19) независимы друг от друга и связаны только по управляющей функции $u(t)$.

2.1. Приближенные решения уравнений (13) и (14)

Как указывалось в теореме 1, система (1) разделяема тогда и только тогда, когда существуют решения уравнений (13 и (14).

Построим приближенные решения уравнений (13) и (14).

Рассмотрим уравнение (13). При $k = \mu = 0$ из этого уравнения получаем

(21) $$A_4(0)H(0) - H(0)A_1(0) - H(0)A_2(0)H(0) + A_3(0) = 0.$$

Пусть матрица

(22) $$A(0) = \begin{pmatrix} A_1(0) & A_2(0) \\ A_3(0) & A_4(0) \end{pmatrix}$$

имеет инвариантные подпространства G_n всех размерностей n. Тогда в подпространство G_n, имеющее базисную матрицу $V(0)$, найдется такая квадратная матрица $A_G(0)$ размера $n \times n$, что выполнится равенство [4]

(23) $$A(0)V(0) = V(0)A_G(0).$$

Представим базисную матрицу $V(0)$ в виде

(24) $$V(0) = \begin{pmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{pmatrix},$$

где $V_1(0)$ − матрица размера $n \times n$.

Теорема. 2. *Пусть* $|V_1(0)| \neq 0$.

c) тогда матрица

(25) $$H(0) = V_2(0) \cdot V_1^{-1}(0)$$

является решением уравнения (21);

d) подпространство G_n *с базисной матрицей*

(26) $$V(0) = \begin{pmatrix} E_n \\ H(0) \end{pmatrix}$$

является инвариантным подпространством матрицы A. *Для этой базисной матрицы и для решения уравнения (21) справедлива формула (25).*

Доказательство. Докажем пункт c теоремы 2. Подставляя матрицы $A(0)$, $V(0)$ в уравнение (23) получим

(27) $$A_1(0)V_1(0) + A_2(0)V_2(0) = V_1(0)A_G(0),$$

(28) $$A_3(0)V_1(0) + A_4(0)V_2(0) = V_2(0)A_G(0).$$

Умножим каждое из уравнения (27) и (28) справа на V_1^{-1}, с учетом (25) имеем

(29) $$A_1(0) + A_2(0)H(0) = V_1(0)A_G(0)V_1^{-1}(0),$$

(30) $$A_3(0) + A_4(0)H(0) = V_2(0)A_G(0)V_1^{-1}(0).$$

Равенство (28) умножим слева на $H(0)$ и вычитаем полученный результат из (30), в итоге получаем уравнение (21).

Докажем пункт d теоремы 2. Считая, что решение $H(0)$ известным, введем обозначение

(31) $$A_3(0)+A_4(0)H(0)=\mathrm{S}(0).$$

Подставляя (31) в (21) имеем

(32) $$H(0)\big(A_1(0)+A_2(0)H(0)\big)=\mathrm{S}(0),$$

тогда с учетом (14) и (31) из (32) получаем

(33) $$A_1(0)+A_2(0)H(0)=\tilde{A}_1(0),$$

(34) $$A_3(0)+A_4(0)H(0)=H(0)\tilde{A}_1(0).$$

Теперь, равенства (33) и (34) записываем так

$$\begin{pmatrix} A_1(0) & A_2(0)\\ A_3(0) & A_4(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n\\ H(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n\\ H(0)\end{pmatrix}\tilde{A}_1(0)$$

или в форме

(35) $$A(0)\begin{pmatrix} E_n\\ H(0)\end{pmatrix}=\big(H(0)\big)\tilde{A}_1(0).$$

Из (35) в соответствии с (23) следует, что подпространство G_n с базисной матрицей (24) является инвариантным подпространством матрицы $A(0)$. Справедливы следующие следствия:

Следствие 2.1. Каждое решение уравнения (21) определяет некоторое n −мерное инвариантное подпространство матрицы A(0).

Следствие 2.2. Между решениями уравнения (21) и n −мерными инвариантными подпространствами матрицы $A(0)$ такими, что в любой их базисной матрице верхний блок матрицы размера $n\times n$ не вырожден, установлено соответствие. Специальный выбор базисной матрицы в виде (26) показывает, что это соответствие взаимно однозначно, т.е. различным решениям отвечают различные инвариантные подпространства и обратно.

Следствие 2.3. Выбор базисной матрицы $V(0)$ подпространства G_n для поиска решения по формуле (25) произволен. В частности, для любой диагонализируемой матрицы $A(0)$ в качестве базиса может быть взята любая система из n ее собственных векторов.

Теперь построим приближенные решения уравнения (14). Известно из [5], что для любой невырожденной матрицы A, не имеющей чисто мнимых корней, последовательность, определяемое условием

$$X_{p+1}=\tfrac{1}{2}\big(X_p+X_p^{-1}\big),\ p=0,1,2,\cdots,\quad X_0=A,$$

сходится, причем квадратичной скоростью и если A устойчивая матрица, то

$$\lim_{p\to\infty}X_p=E.$$

Предположим, что выполняется условие

i) при $k=\mu=0$ матрицы

$\tilde{A}_1(0)=A_1(0)+A_2(0)H(0)$ и $\tilde{A}_4(0)=A_4(0)-H(0)A_2(0)$ − устойчивы.

При выполнении условий i умножаем уравнение (14) слева и справа на $\tilde{A}_1^{-1}(0)$ и $\tilde{A}_4^{-1}(0)$

$$N(0)\tilde{A}_4^{-1}(0)-\tilde{A}_1^{-1}(0)N(0)=\tilde{A}_1^{-1}(0)A_2(0)\,\tilde{A}_4^{-1}(0),$$

и полученное уравнение перепишем в виде

(36) $$N(0)\tfrac{1}{2}\big(\tilde{A}_4(0)+\tilde{A}_4^{-1}(0)\big)-\tfrac{1}{2}\Big(\tilde{A}_1(0)+\tilde{A}_1^{-1}(0)\Big)N(0)=$$
$$=\tfrac{1}{2}\big(\tilde{A}_1^{-1}(0)A_2(0)\,\tilde{A}_4^{-1}(0)-A_2(0)\big).$$

Исходя из условия: $\tilde{A}_{10}(0)=\tilde{A}_1(0)$, $\tilde{A}_{40}(0)=\tilde{A}_4(0)$, $A_{20}(0)=A_2(0)$ строим последовательности матриц:

(37) $$\tilde{A}_{1p+1}(0)=\tfrac{1}{2}\Big(\tilde{A}_{1p}(0)+\tilde{A}_{1p}^{-1}(0)\Big),p=0,1,2,\cdots$$
$$\tilde{A}_{4p+1}(0)=\tfrac{1}{2}\big(\tilde{A}_{4p}(0)+\tilde{A}_{4p}^{-1}(0)\big),$$

$$A_{2p+1}(0) = \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_{1p}^{-1}(0)A_{2p}(0)\,\tilde{A}_{4p}^{-1}(0) - A_{2p}(0)\right).$$

С учетом (36) и (37) имеем следующие уравнения эквивалентные к уравнению (16)

(38) $$\tilde{A}_{1p+1}(0)N(0) - N(0)\tilde{A}_{4p+1}(0) = A_{2p+1}(0).$$

Поскольку матрицы $\tilde{A}_1(0)$ и $\tilde{A}_4(0)$ устойчивые, то

$$\lim_{p\to\infty}\tilde{A}_{1p}(0) = E_n,\ \ \lim_{p\to\infty}\tilde{A}_{4p} = -E_n$$

и левая часть уравнения (38) имеет предел при $p \to \infty$, поэтому

(39) $$N(0) = \frac{1}{2}A_{2p}(0).$$

Так как $H(0)$ и $N(0)$ известны, при $k = 0,\ 1,\cdots,M-1$, $\mu \neq 0$ из уравнения (15) и (16) находим:

(40)
$$H(\mu) = \big(A_4(0)H(0) + A_3(0)\big)\tilde{A}_1^{-1}(0),$$
$$H(2\mu) = \big(A_4(\mu)H(\mu) + A_3(\mu)\big)\tilde{A}_1^{-1}(\mu),\cdots,$$
$$H((M-1)\mu) = \big(A_4((M-2)\mu)H((M-2)\mu) + A_3((M-2)\mu)\big)\times$$
$$\times\,\tilde{A}_1^{-1}((M-2)\mu),$$

где

$$\tilde{A}_1(k\mu) = A_1(k\mu) + A_2(k\mu)H(k\mu).$$

(41)
$$N(\mu) = \left(\tilde{A}_1(0)N(0) - A_2(0)\right)\tilde{A}_4^{-1}(0),$$
$$N(2\mu) = \left(\tilde{A}_1(\mu)N(\mu) - A_2(\mu)\right)\tilde{A}_4^{-1}(\mu),\cdots,$$
$$N((M-1)\mu) = \left(\tilde{A}_1((M-2)\mu)N((M-2)\mu) - A_2((M-2)\mu)\right)\times$$
$$\times\,\tilde{A}_4^{-1}((M-2)\mu),$$

где

$$\tilde{A}_4(k\mu) = A_4(k\mu) - H\big((k+1)\mu\big)A_2(k\mu).$$

3. Алгоритм решений задачи декомпозиции линейной дискретной управляемой системы с малым шагом

Отметим следующий алгоритм решений задачи:

1) вводим данные: матрицы $A(t)$ и $B(t)$, начальные и конечные условия: $x(0) = x_0$, $z(0) = z_0$, $x(M) = x_M$, $z(M) = z_M$, количество шагов *M*, малый период квантования μ;
2) проверяем выполнения условий a и b, если эти условия выполняются, то переходим к пункту 3, иначе к пункту 1;
3) находим собственные значения и собственные векторы матрицы $A(0)$ и через них определяем матрицы: $V_1(0)$, $V_2(0)$ и $V_1^{-1}(0)$;
4) по формуле (25) определяем матрицу $H(0)$;
5) проверяем выполнения равенство (21) и условие i, если $H(0)$ удовлетворяет уравнению (21) и условие i выполняется, то переходим к пункту (6), иначе к пункту (1);
6) построим последовательности матриц $\tilde{A}_{1p}(0)$, $\tilde{A}_{4p}(0)$, $A_{2p}(0)$ по формулам (37);
7) по формуле (39) находим $N(0)$;
8) при $k = \mu = 0$ находим матрицы $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$ по формулам (17);
9) находим последовательность матриц: $H(k\mu)$ и $N(k\mu)$ при $k = 0,\ 1,\cdots,M-1$, $\mu \neq 0$ по формулам (40) и (41);
10) находим начальные и конечные условия задачи по формулам (39);

11) записываем разделенные уравнения вида (18) и (19) с граничными условиями (20).

4. Заключение

При известном $u(k\mu)$ решение задачи (18)-(20) представим в виде

$$\tilde{y}(k\mu) = \left(G(k\mu,0)\right)^k \tilde{y}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\left(G(i\mu,0)\right)^{k-i-1}\tilde{B}(i\mu)u(k\mu),$$

где

$$\tilde{y}(t) = D^{-1}(t+\mu)y(t) = \begin{pmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{z}(t)\end{pmatrix},\ \tilde{B}(t) = D^{-1}(t+\mu)B(t),$$

$$G(t,0) = \begin{pmatrix}\Phi(t,0) & 0\\ 0 & \Psi(t,0)\end{pmatrix},$$

$\Phi(t,0), \Psi(t,0)$ −переходные матрицы систем, соответственно

$$\tilde{x}(t+\mu) = \tilde{A}_1(t)\tilde{x}(t), \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0,$$
$$\tilde{z}(t+\mu) = \tilde{A}_4(t)\tilde{z}(t), \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0.$$

Список литературы

1. Геращенко Е.И., С.М. Геращенко. Метод разделение движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука, 1975, 296 с.
2. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988, 256 с.
3. Портер У. Современные основания общей теории систем. М.: Наука, 1971. 556 с.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.
5. Beavers A.N., Denman E.D. A new solution method for the Lyapunov matrix equation // SIAM J. Appl. Math. 1975. Vol. 29. P. 416-421.