УДК 681.514

АНИЗОТРОПИЙАЯ ЧАСТОТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИТОПИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

А.А. Белов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: a.a.belov@inbox.ru

О.Г. Андрианова
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН/ МИЭМ НИУ ВШЭ
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65/ 123458, Москва, Таллинская ул., 34
E-mail: andrianovaog@gmail.com

Д.А. Гольдин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: goldin@ipu.ru

Ключевые слова: стохастические системы, линейные системы, политопические неопределенности, чувствительность систем, случайное воздействие.

Аннотация: В данной работе решается задача робастного анизотропийного анализа линейных дискретных систем с политопическими неопределенностями. Решение поставленной задачи было получено с использованием матричных неравенств, в которых переменные зависят от параметров. Полученный результат может быть использован для построения управления по состоянию или по выходу, обеспечивающего заданное качество замкнутой системы.

1. Введение

В теории автоматического управления наиболее популярным методом описания объекта управления являются дифференциальные или разностные уравнения с постоянными известными параметрами. Однако во многих практических приложениях такие модели описывают систему не достоверно, так как в процессе функционирования реального объекта управления параметры системы могут изменяться с течением времени. Такие изменения могут приводить к потере качества и даже к потере устойчивости замкнутой системы. Поэтому в последние десятилетия теория автоматического управления изучает системы, параметры которых заданы не точно, а в некотором заранее известном диапазоне. Цель исследования таких систем заключается в оценке устойчивости и качества при всех возможных значениях неопределенных параметров с дальнейшим синтезом законов управления, позволяющих сохранять желаемое качество процессов, протекающих в системе, и называемых робастными. Одним из способов задания неопределенностей в параметрах системы является политопическая неопределенность. В этом случае множество параметров системы задается в виде выпуклого "многогранника". В последние десятилетия задачи $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ анализа и построения робастного управления для систем с политопическими неопределенностями привлекли внимание широкого круга специалистов. $\mathcal{H}_\infty$ норма играет важную роль в теории управления, так как имеет физический смысл меры усиления системой неблагоприятного возмущающего воздействия, влияние которого на систему, как правило, необходимо снижать [1]. $\mathcal{H}_2$ норма выступает в качестве оценки дисперсии выходного сигнала в случае, если на вход системы поступает гауссовский белый шум. Так, задачи $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ анализа для систем с политопическими неопределенностями рассматривались в работах [2,3].

Задачи построения робастного управления (по состоянию или выходу) и фильтрации для указанного класса систем с $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ критериями качества решались в большом количестве современных работ. Управление в виде статической обратной связи по состоянию было построено в [4,5], динамическое управление по выходу – в [4–9]. Известно, что $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ подходы имеют существенные недостатки. С одной стороны, если возмущение является сильно коррелированным, робастный $\mathcal{H}_2$ регулятор не может обеспечить желаемого поведения. С другой стороны, если входное воздействие близко к гауссовскому белому шуму, робастный $\mathcal{H}_\infty$ регулятор приводит к необоснованной потере энергии.

Дополнительные ограничения на спектральную плотность входного воздействия позволяют избежать указанных выше недостатков $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ подходов. Дополнительная информация о входном воздействии, связанная с использованием теоретико-информационных критериев качества позволяет более точно настраивать регуляторы в зависимости от спектральной плотности действующего на систему возмущения. Такая теория получила название стохастической $\mathcal{H}_\infty$ теории управления или анизотропийной теории [10–14]. Основными понятиями анизотропийной теории являются анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия случайной последовательности и анизотропийная норма системы. Анизотропия случайного вектора есть минимальное значение относительной энтропии (расстояние Кульбака-Лейблера) между плотностями распределения вероятностей случайного вектора и гауссовского сигнала с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. Средняя анизотропия – предел отношения анизотропии вектора, состоящего из n случайных векторов, и числа n, когда n стремится в бесконечность. Средняя анизотропия характеризует "цветность" входной последовательности или отличие последовательности от гауссовского белого шума.

Индуцированная $\mathcal{H}_2$ норма системы, на вход которой подается случайный сигнал с ограниченной средней анизотропией, называется анизотропийной нормой стационарной системы. Анизотропийная норма системы заключена между $\mathcal{H}_2$ нормой, деленной на квадратный корень степени МакМиллана объекта управления, и $\mathcal{H}_\infty$ нормой. В терминах анизотропийной теории $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ нормы являются предельными случаями анизотропийной (когда средняя анизотропия стремится к нулю и к бесконечности соответственно). Таким образом, анизотропийные подходы к управлению в некотором смысле обобщают $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ подходы. Задачи анизотропийного анализа и синтеза методами выпуклой оптимизации были решены в [15, 16]. Также было предложено несколько подходов к анизотропийному робастному анализу для линейных систем с неопределенностями [17, 18]. В [17] рассматривались системы с дробно-линейными неопределенностями. В [18] решалась задача анализа для линейных систем с ограниченными по норме неопределенностями.

Данная работа посвящена решению задач робастного анизотропийного анализа для линейных дискретных систем с политопическими неопределенностями. Полученные условия вычисления анизотропийной нормы сформулированы в терминах матричных неравенств.

2. Постановка задачи и основной результат

Предположим, что линейная дискретная стационарная система в пространстве состояний задана в следующем виде:

(1) $$x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B(\Theta)w(k),$$

(2) $$z(k) = C(\Theta)x(k) + D(\Theta)w(k),$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ – стационарная последовательность с заданным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ $(a \geqslant 0)$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ – измеряемый выход. Обозначим передаточную функцию системы (1)–(2) через F. Среднюю анизотропию сигнала $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ можно посчитать, используя выражение

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

$\mathbf{A}(W_{0:N-1}) = -\frac{m}{2}\ln\left(\frac{2\pi e}{m}\mathbf{E}(|W_{0:N-1}|^2)\right) - h(W_{0:N-1})$ – анизотропия случайного вектора $W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w(0) \\ \vdots \\ w(N-1) \end{bmatrix}$, $h(W_{0:N-1}) = -\mathbf{E}\ln f(W_{0:N-1}) = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(w)\ln f(w)dw$ – дифференциальная энтропия, $f : \mathbb{R}^{mN} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – плотность распределения вероятностей вектора $W_{0:N-1}$.

Матрицы A, B, C, D, зависящие от параметра Θ, заданы в форме

(3) $$A(\Theta) = \sum_{i=1}^r \Theta_i A_i,\ B(\Theta) = \sum_{i=1}^r \Theta_i B_i,\ C(\Theta) = \sum_{i=1}^r \Theta_i C_i,\ D(\Theta) = \sum_{i=1}^r \Theta_i D_i,$$

где $\sum_{i=1}^r \Theta_i = 1, \quad \Theta_i \geqslant 0, \quad \Theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1,r}.$

Для системы с реализацией в пространстве состояний (A, B, C, D) и входным сигналом $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ вводится понятие среднеквадратичного коэффициента усиления (СККУ) в виде: [13]

$$Q(F, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

где

$$\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \mathbf{E}|y(k)|^2}.$$

$\|Y\|_{\mathcal{P}}$ – мощностная норма суммируемой с квадратом последовательности $Y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания. a-Анизотропийная норма системы может быть определена как супремум СККУ на множестве сигналов, ограниченных средней анизотропией, равной a, т.е.

$$\|F\|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(F, W).$$

Постановка задачи 1. *Для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ случайного внешнего возмущения $w(k)$ и заданного числа $\gamma > 0$ требуется проверить устойчивость системы (1)–(2) и ограниченность ее анизотропийной нормы $\|F\|_a < \gamma$ для всех матриц, удовлетворяющих ограничениям (3).*

Сформулируем условия теоремы, дающей ответ на поставленную задачу.

Теорема 1. *Система (1)–(2) является устойчивой для всех возможных неопределенностей из семейства (3) и ее a-анизотропийная норма меньше заданного числа $\gamma > 0$, если существуют матрицы $P(\Theta) > 0$, $\Psi > 0$, $G(\Theta)$ и число η : $\eta > \gamma^2$, которые удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$\eta - \left(\mathrm{e}^{-2a}\det\Psi\right)^{1/m} \;<\; \gamma^2; \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G(\Theta)B(\Theta) & L(\Theta) & \star \\ D(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} \;<\; 0, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G(\Theta)A(\Theta) & G(\Theta)B(\Theta) & L(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D(\Theta) & 0 & -I_m \end{bmatrix} \;<\; 0, \tag{6}$$

где $L(\Theta) = -G(\Theta) - G^{\mathrm{T}}(\Theta) + P(\Theta)$.

Для получения условий устойчивости и ограниченности a-анизотропийной нормы системы воспользуемся аппаратом функций Ляпунова. На первом этапе выберем зависящую от параметра функцию Ляпунова в виде: $V(k) = x^{\mathrm{T}}(k)P(\Theta)x(k)$, где $P(\Theta) = \sum_{i=1}^{r}\Theta_i P_i > 0$ и рассмотрим разность между $V(k+1)$ и $V(k)$. Преобразование разности функций Ляпунова для различных k и суммирование таких выражений по всем возможным k приводит к условию устойчивости системы в виде (6) и неравенству

$$\sup_W \frac{\sum_{k=0}^{\infty} z^{\mathrm{T}}(k)z(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^{\mathrm{T}}(k)w(k)} < \gamma^2,$$

которое отвечает за ограниченность $\mathcal{H}_\infty$ нормы системы. Т.е. полученные на данном этапе условия справедливы для всех возможных внешних возмущений. На втором этапе делаем учет ограничений на множество входных сигналов. Показываем, что, ограничивая класс входных сигналов последовательностями с ограниченной средней анизотропией, к полученному условию устойчивости добавляются еще два неравенства (4) и (5), отвечающие за спектральные характеристики сигнала.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-08-00185, 18-38-00076, 19-08-00535).

Список литературы

1. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B. State space solutions to the standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. 34, No. 8. P. 831-847.
2. Peaucelle D., Arzelier D. Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. Vol. 46. P. 624-630.
3. Oliveira R.C.L.F., Peres P.L.D. A convex optimization procedure to compute $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms for uncertain linear systems in polytopic domains // Optim. Control Appl. Meth. 2008. Vol. 29. P. 295-312.
4. Peaucelle D., Ebihara Y. LMI results for robust control design of observer-based controllers, the discrete-time case with polytopic uncertainties // IFAC Proceedings Volumes. 2014. Vol. 47, No. 3. P. 6527-6532.
5. Chang X.-H. Robust Output Feedback H-infinity Control and Filtering for Uncertain Linear Systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014.
6. Suplin V., Shaked U.Robust $\mathcal{H}_\infty$ output-feedback control of linear discrete-time system // Systems & Control Letters. 2005. Vol. 54. P. 799-808.
7. Yang R., Lu L., and Xie L. Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time systems with polytopic uncertainties via dynamic output feedback // International Journal of Control. 2005. Vol. 78, No. 16. P. 1285-1294.
8. Lu L., Yang R., Xie L. Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control of Discrete-time Systems with Polytopic Uncertainties via Dynamic Output Feedback // 2005 American Control Conference. Portland, OR, USA, 2005. P. 4315-4320.
9. Nogueira A., Araujo H. X., and Oliveira G. H. C. $\mathcal{H}_\infty$ Robust Controller for Discrete-Time Linear Systems Under Control and Output Constraints // 2009 IEEE International Conference on Control and Automation. Christchurch, New Zealand, 2009. P. 495–499.
10. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P. Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization // Proceedings 33rd IEEE Conf. on Decision and Control. Florida, USA, 1994. P. 2249-2250.
11. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A. . A stochastic problem of $\mathcal{H}_\infty$-optimization // Doklady Math. 1995. Vol. 52, No. 1. P. 155-157.
12. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization problem // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29, No. 1. P. 3816-3821.
13. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A. V. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29, No. 1. P. 3057-3062.
14. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy of signals and the entropy of linear stationary systems // Doklady Math. 1995. Vol. 51, No. 3. P. 388-390.
15. Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P., Timin V.N. Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities // IFAC Proceedings Volumes. 2011. Vol. 44, No. 1. P. 2332-2337.
16. Tchaikovsky M.M. Static output feedback anisotropic controller design by LMI-based approach: General and special cases // Proceedings 2012 American Control Conf., Montreal, Canada, 2012.
17. Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P. On upper estimate of anisotropic norm of uncertain system with application to stochastic robust control // Int. J. of Control. 2018. Vol. 91, No. 11. P. 2411-2421.
18. Andrianova O.G., Belov A.A. Robust performance analysis of linear discrete-time systems in presence of colored noise // European Journal of Control. 2018. Vol. 42. P. 38-48.