

УДК 681.5.013

СИНТЕЗ АСТАТИЧЕСКИХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМИ ПЕРЕХОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

А.Р. Гайдук

Южный федеральный университет

Россия, 347922, Таганрог, пер. Некрасовский, 44

E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

М.Ю. Медведев

Россия, 347922, Таганрог, пер. Некрасовский, 44

E-mail: medvmihal@sfedu.ru

К.В. Колоколова

Россия, 347922, Таганрог, пер. Некрасовский, 44

E-mail: kbesklubova@mail.ru

Ключевые слова: объект, цифровое устройство управления, система, управление по выходу и воздействиям, астатизм, прямые показатели качества

Аннотация: Повышенный порядок астатизма придает системам управления более высокую точность, поэтому они гораздо чаще применяются при решении многих задач управления. В особенности, это относится к цифровым системам, которые обладают более высокой технологичностью и надежностью. В общем случае задача синтеза цифровых систем несколько сложнее аналогичной задачи в непрерывном случае, но интенсивное развитие вычислительных средств существенно упрощает как их синтез, так и реализацию. Статья посвящена решению задачи синтеза цифровых астатических систем управления с конечной длительностью переходных процессов и постоянным перерегулированием. Предполагается, что реализация систем осуществляется на основе принципа управления по выходу и воздействиям. Метод формирования желаемых передаточных функций цифровых систем управления указанного типа с желаемым порядком астатизма и при наличии запаздывания на несколько периодов предлагается в данной статье. Этот метод является обобщением результатов, полученных в прошлом веке В.А. Никольским. Системы управления с постоянным перерегулированием и конечными переходными процессами имеют повышенный порядок, поэтому для их реализации требуются микроконтроллеры с высоким быстродействием. Эффективность предложенного метода иллюстрируется численным примером.

1. Введение

В последние годы все более широкое распространение получают системы управления с применением микропроцессоров и микроконтроллеров, созданных на основе интегральных технологий, т.е. цифровые системы управления (ЦСУ). Цифровые системы обладают повышенными характеристиками, такими как: качество управления, надежность, технологичность изготовления и адаптируемость к изменениям технологических процессов [1-3]. Важной особенностью ЦСУ является возможность иметь конечный переходный процесс при постоянном перерегулировании. Качество управления раз-

личными техническими объектами такими ЦСУ можно существенно повысить, путем придания им свойства астатизма [3-5].

В связи с этим представляется целесообразным решение задачи создания астатических ЦСУ с конечными переходными процессами и постоянным перерегулированием. Решение этой задачи заметно усложняется в тех случаях, когда система управления характеризуется наличием запаздывания. Это запаздывание может возникать в объекте управления, однако чаще всего оно обусловлено временем, затрачиваемым на передачу сигналов, а также на преобразование переменных и вычисление управляющих воздействий в микроконтроллере. Запаздывание приводит к возникновению структурных ошибок цифровых систем. Эти ошибки можно устранить, применив астатические системы с конечной длительностью переходных процессов [5, 6].

Целью работы является разработка метода формирования желаемых передаточных функций астатических ЦСУ с конечным переходным процессом и постоянным перерегулированием. Практическая значимость данного метода заключается в том, что цифровые системы с указанными свойствами всегда могут быть реализованы методом аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям (АССУВВ) [7].

2. Постановка задачи

Системами с конечными переходными процессами называются цифровые (дискретные) системы, передаточная функция которых имеет вид $W_{yg}(z) = H_0(z) / z^{n_{\text{сис}}}$. Условие астатизма v_g порядка простейшей системы этого типа имеет вид:

$$(1) \quad 1 - W_{yg}(z) = N(z)(z-1)^{v_g} / z^{n_{\text{сис}}},$$

где $n_{\text{сис}}$ – порядок системы; $N(z)$ – полином степень, которого $n_N = \deg N(z) = n_{\text{сис}} - v_g$.

При $n_{\text{сис}} = 2$ и $v_g = 2$ соответствующая передаточная функция $W_{yg}^*(z) = (2z-1)/z^2$, а разностное уравнение $y_k = 2g_{k-1} - g_{k-2}$. Значения реакции y_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ этой системы на ступенчатое $g_{1k} = 1(k)$ равны: $y_{10} = 0, y_{11} = 2, y_{12} = 1, y_{13} = 1, \dots$, а на линейное воздействие $g_{2k} = k$ равны $y_{20} = 0, y_{21} = 0, y_{22} = 2, y_{23} = 3, y_{24} = 4, \dots$. Как видно, переходные процессы, действительно, делятся два такта, ошибки системы, вызванные ими, равны нулю, но перерегулирование составляет 100 %, что, конечно, не приемлемо для практики.

В случае астатизма третьего порядка ошибка системы, передаточная функция которой $W_{yg}(z) = (3z^2 - 3z + 1) / z^3$ также равны нулю, но перерегулирование достигает 200 %.

В работах [8, 9] установлено, что для уменьшения перерегулирования в дискретных системах необходимо увеличивать порядок системы. В.А. Никольским еще в работе [8] для случая $v_g = 2$ были найдены полиномы $N_n(z, \sigma\%)$ из (1), при которых дискретные системы, удовлетворяющие (1), имеют постоянное перерегулирование равное 10%, 15%, 20%, 25%, 33% или 50%, но при более высоких порядках замкнутых систем.

Относительный порядок $\mu_{\text{сис}}$ дискретных систем, рассмотренных В.А. Никольским, равен единице. В тоже время, при наличии запаздывания в цифровых системах их относительный порядок увеличивается. Поэтому для обеспечения реализуемости ЦСУ в этих случаях необходимо их желаемые передаточные функции $W_{yg}^*(z)$ формировать с повышенными значениями $\mu_{\text{сис}}$ [5, 7]. Однако, сделать это на основе полиномов из работы [8] невозможно.

В связи с этим далее рассматривается задача разработки метода определения же-

лаемых ПФ $W_{yg}^*(z)$ цифровых систем с $\mu_{\text{сис}} > 1$, при которых порядок астатизма $v_g > 1$, переходный процесс является конечным, а перерегулирование постоянное.

3. Решение задачи

Если система имеет относительный порядок $\mu_{\text{сис}}$, то из (1) вытекает соотношение

$$(2) \quad \deg[z^{n_{\text{сис}}} - (z-1)^{v_g} N(z)] = n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}.$$

Пусть $1 - W_{yg}^*(z) = \bar{D}(z) / z^{n_{\text{сис}}}$, т.е. полином $\bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - z^{n_{\text{сис}}} W_{yg}^*(z)$. При $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$

$$(3) \quad \bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - z^{n_{\text{сис}}} W_{yg}^*(z) = z^{n_{\text{сис}}} - H_0^*(z).$$

Предположим, цифровая система с ПФ $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$ имеет порядок астатизма v_g к задающему воздействию. Тогда, согласно (1) полином $\bar{D}(z)$ (3) имеет v_g корней тождественно равных 1, т.е. удовлетворяет условию $\bar{D}(z) = (z-1)^{v_g} N(z)$, причем его степень равна $n_{\text{сис}}$.

С другой стороны, если дискретная система, относительный порядок которой равен $\mu_{\text{сис}}$, имеет переходный процесс конечной длительности и постоянное перерегулирование σ %, то полином $H_0^*(z) = (1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} - \gamma$, где $\gamma = \sigma \% / 100\%$. Изложенное можно рассматривать как доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Цифровая система с передаточной функцией $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$ и относительным порядком $\mu_{\text{сис}}$ имеет конечную длительность переходных процессов, постоянное перерегулирование $\sigma = \gamma 100$ % и астатизм порядка v_g к задающему воздействию, если ее порядок $n_{\text{сис}}$ такой, что полином

$$(4) \quad \bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - (1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} + \gamma$$

имеет ζ_g корней тождественно равных единице.

Теорема 1 позволяет предложить конструктивный алгоритм построения желаемых ПФ цифровых систем с заданным порядком астатизма, постоянным перерегулированием и конечной длительностью переходного процесса, с учетом относительного порядка, обусловленного реализующей системой с заданной частью. Фактически, он заключается в определении степени $n_{\text{сис}}$, при которой полином $\bar{D}(z)$ (4) с заданными $\mu_{\text{сис}}$ и $\gamma = \sigma \% / 100\%$ имеет v_g корней равных единице. Аналитическое решение этой задачи в общем случае найти не удалось. В системе MATLAB были найдены порядки $n_{\text{сис}}$ цифровых систем при $v_g = 2$ и некоторых значениях σ % и $\mu_{\text{сис}}$, приведенные в таблице 1.

Таблица 1. Порядок астатических систем

Порядок астатизма $v_g = 2$				
σ % \ $\mu_{\text{сис}}$	1	2	3	4
10	11	22	33	44
15	8	16	24	32
20	6	12	18	24
25	5	10	15	20
33	4	8	12	16

Наряду с таблицей 1 порядок систем управления с постоянным перерегулированием и конечным переходным процессом при $v_g = 2$ можно определять по формуле

$$(5) \quad n_{\text{сис}} = (\gamma^{-1} + 1)\mu_{\text{сис}}, \quad v_g = 2,$$

где $\gamma = \sigma \% / 100 \%$, причем $1/\gamma$ – целое число (при $\sigma = 15\%$ величина $\gamma = 1/7$). При этом желаемая ПФ $W_{yg}^*(z)$ определяется вытекающей из выражения (3) формулой:

$$(6) \quad W_{yg}^*(z) = [(1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} - \gamma] / z^{n_{\text{сис}}}.$$

Из приведенных выражений следует, что с уменьшением $\sigma \%$ резко возрастает порядок системы. При этом если с уменьшением σ одновременно уменьшать и период T , то длительность переходного процесса расти не будет. Правда, это потребует применения более быстродействующих процессоров.

Отметим, что значения порядков систем $n_{\text{сис}}$ при $\mu_{\text{сис}} = 1$, приведенные в таблице 1, совпадают со значениями, приведенными в работе [8]. Значений $n_{\text{сис}}$, при которых полином (4) имеет v_g корней равных единице при $v_g \geq 3$, $\mu_{\text{сис}} \geq 1$ и каких либо значениях $\gamma < 0,5$ пока найти не удалось.

4. Пример

Для иллюстрации предлагаемого метода, построим желаемую ПФ астатической системы, имеющей относительный порядок $\mu_{\text{сис}} = 3$, второй порядок астатизма и постоянное перерегулирование в 20%. В данном случае $v_g = 2$, $\gamma = 0,2$, поэтому по таблице 1 (или по формуле (5)) находим $n_{\text{сис}} = 18$. При этом по формуле (6) имеем

$$(7) \quad W_{yg}^*(z) = (1,2z^{15} - 0,2) / z^{18}.$$

Построенная по (7) в MATLAB при $T = 0,5$ с переходная функция системы показана на рис. 1. Реакция этой же системы на линейное воздействие $g_k = 0,5k$, полученная в Simulink, приведена на рис. 2. На основе этих рисунков легко заключить, что система с ПФ (7) имеет заданные второй порядок астатизма и перерегулирование 20%. При этом ее относительный порядок равен 3.

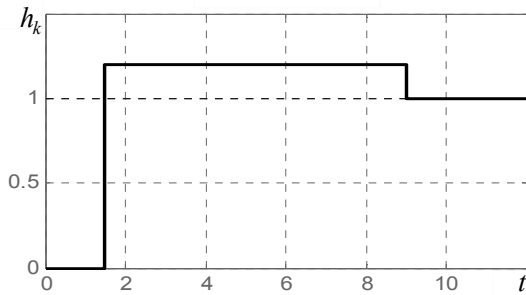


Рис. 1. Переходная функция.

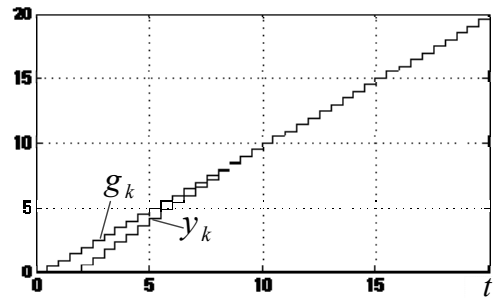


Рис. 2. Реакция на воздействие $g_k = 0,5k$.

Полином $N(z)$, фигурирующий в равенствах (1) или (2) в данном случае имеет вид: $N(z) = z^{16} + 2z^{15} + 3z^{14} + 2,8z^{13} + 2,6z^{12} + 2,4z^{11} + 2,2z^{10} + 2z^9 + 1,8z^8 + 1,6z^7 + 1,4z^6 + 1,2z^5 + 1,0z^4 + 0,8z^3 + 0,6z^2 + 0,4z + 0,2$. Заметим, что последние пять коэффициентов этого полинома совпадают с коэффициентами В.А. Никольского для случая $\sigma = 20\%$ [8].

Для реализации ПФ (7) в цифровой системе с заданной непрерывной частью, как обычно, находится уравнение «вход-выход» соответствующего дискретного объекта управления. По этому уравнению методом АССУВВ с учетом (7) определяется разностное уравнение ЦУУ с управлением по выходу и воздействиям [7]. На основе этого уравнения с учетом запаздывания определяется алгоритм расчета управляющих воз-

действий, который реализуется микроконтроллером. Соответствующий порядок построения алгоритмом ЦУУ подробно изложен в [5].

5. Заключение

Полученное в работе решение уравнения, разрешающего задачу формирования желаемых передаточных функций астатических цифровых систем с конечными переходными процессами и постоянным перерегулированием позволяет решить задачу синтеза цифровой системы управления, если порядок астатизма не выше второго. Относительный порядок системы может быть любым, а запаздывание может отсутствовать, быть равным одному или нескольким периодам дискретизации. С увеличением относительного порядка и уменьшением перерегулирования порядок системы резко возрастает. Для предотвращения этого необходимо применять более быстродействующие процессоры. Вопрос о том имеет ли решения рассматриваемая задача синтеза при более высоких порядках астатизма остается открытым. Полученные результаты могут использоваться при разработке высокоточных систем управления различными техническими объектами.

Работа выполнена при поддержке Российского национального фонда грант № 18-19-00621.

Список литературы

1. Григорьев В.В., Быстров С.В., Бойков В.И., Болтунов Г.И., Мансурова О.К. Цифровые системы управления. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 133 с.
2. Денисенко В.В. Компьютерное управление технологическими процессом, экспериментом, оборудованием. М.: Горячая линия-Телеком, 2009. 608 с.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. СПб.: Профессия, 2004. 902 с.
4. Amato F., Carannante G., De Tommasi G. Input-output Finite-time Stabilization of a Class of Hybrid Systems via static Output Feedback // *Int. J. Control.* 2011. Vol. 84, No. 6. P. 1055-1066.
5. Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А. Анализ и аналитический синтез цифровых систем управления. СПб.: Лань, 2018
6. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления. СПб.: СПбМТУ, 2006. 161 с.
7. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
8. Никольский В.А. Об одном способе обеспечения астатизма второго порядка в дискретной системе комбинированного управления с компенсацией возмущения // *Известия вузов. Электромеханика.* 1978. № 11. С. 1168–1173.
9. Семенов А.В., Гайдук А.Р., Геложе Ю.А., Семенова А.В., Процедура автоматизированного синтеза цифровых управляющих систем // *Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск «Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении».* 2014. № 4(153). С. 150-157.