УДК 517.962

К ВОПРОСУ О НЕЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

А.В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9

E-mail: a.platonov@spbu.ru

Ключевые слова: нестационарные разностные системы, нелинейная стабилизация, асимптотическая и практическая устойчивость, функции Ляпунова.

Аннотация: Рассматривается один класс нелинейных разностных систем. Предполагается, что имеющаяся схема управления позволяет стабилизировать нелинейную часть системы, в то время как линейная часть может быть неустойчивой. Для стабилизации всей системы используется некоторый вспомогательный нестационарный коэффициент усиления. Установлены достаточные условия, выполнения которых гарантирует асимптотическую или хотя бы практическую устойчивость нулевого решения исследуемой системы.

1. Введение

Разностные системы используются для описания многих динамических дискретных процессов [1]. Кроме того, численные методы решения дифференциальных уравнений, как правило, основаны на замене непрерывной системы некоторым ее разностным аналогом. Однако, возникает вопрос об адекватности подобной замены. Известно [2], что при дискретизации системы могут теряться многие важные качественные характеристики решений, такие как устойчивость, ограниченность, и т.д. Для нелинейных разностных систем, также как и для дифференциальных систем, были получены критерии устойчивости по линейному приближению [1]. Однако, в критических по Ляпунову случаях приходится иметь дело с так называемыми существенно нелинейными системами, для которых не применимы методы линейного анализа. Например, в [3] были получены условия устойчивости для дифференциальных систем, где в качестве системы нелинейного приближения использовались стационарные однородные системы. В [4] эти результаты были распространены на разностные системы. В настоящей работе предполагается, что исследуемая разностная система содержит как линейную, так и существенно нелинейную однородную части. Рассматривается случай, когда линейная часть, вообще говоря, неустойчива, а стабилизировать удается лишь нелинейную часть. Такая ситуация типична, например, при исследовании систем с мультипликативным управлением. Стабилизации всей системы часто удается достигнуть засчет нестационарного характера ее структуры. В данной работе полагаем, что нелинейная часть системы содержит некоторый нестационарный коэффициент, который можно считать управляемым.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть задана разностная система

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) + h(k)\mathbf{R}(\mathbf{x}(k)). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x}(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))^T$ — вектор состояния системы; $\mathbf{P}(k)$ — ограниченная матрица размерности $(n \times n)$; $h(k)$ — неотрицательная скалярная функция; компоненты вектора $\mathbf{R}(\mathbf{z})$ являются непрерывными при $\mathbf{z} \in R^n$ однородными функциями порядка $\mu > 1$; $k = 0, 1, \ldots$

Далее будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. *Нулевое решение дифференциальной системы*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}(\mathbf{z}) \tag{2}$$

асимптотически устойчиво, и для этой системы построена непрерывно дифференцируемая, положительно определенная, однородная порядка $\gamma > 1$ функция $V(\mathbf{z})$, удовлетворяющая при $\mathbf{z} \in R^n$ следующим оценкам:

$$a_1\|\mathbf{z}\|^\gamma \leqslant V(\mathbf{z}) \leqslant a_2\|\mathbf{z}\|^\gamma, \quad \left\|\frac{\partial V(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right\| \leqslant a_3\|\mathbf{z}\|^{\gamma-1},$$

$$\left(\frac{\partial V(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbf{R}(\mathbf{z}) \leqslant -a_4\|\mathbf{z}\|^{\gamma-1+\mu},$$

где $a_1, \ldots, a_4$ — некоторые положительные постоянные.

Известно [3], что из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2) следует существование функции Ляпунова с указанными в предположении 1 свойствами.

Предположение 1 означает, что имеющаяся схема управления позволяет стабилизировать нелинейную часть рассматриваемой системы, в то время как линейная часть может быть неустойчивой. Установим далее условия на функцию $h(k)$, выполнение которых будет гарантировать асимптотическую или практическую устойчивость нулевого решения всей системы (1). Эту функцию можно рассматривать как некоторый коэффициент усиления управления.

Пусть

$$\|\mathbf{P}(k)\mathbf{z}\| \leqslant \alpha\|\mathbf{z}\|, \quad \|\mathbf{R}(\mathbf{z})\| \leqslant \beta\|\mathbf{z}\|^\mu$$

при $\mathbf{z} \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$.

Следуя [4], рассмотрим приращение функции $V(\mathbf{z})$ на решениях системы (1). Получим

$$\Delta V = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k) + h(k)\mathbf{R}(\mathbf{x}(k))) - V(\mathbf{x}(k)) +$$

$$+V(\mathbf{x}(k) + \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) + h(k)\mathbf{R}(\mathbf{x}(k))) - V(\mathbf{x}(k) + h(k)\mathbf{R}(\mathbf{x}(k))) =$$

$$= h(k)\left(\frac{\partial V(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbf{R}(\mathbf{x}(k)) +$$

$$+ h(k)\left(\frac{\partial V(\mathbf{x}(k)+\theta_k h(k)\mathbf{R}(\mathbf{x}(k)))}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial V(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbf{R}(\mathbf{x}(k)) +$$

$$+ \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}^T(k)\frac{\partial V(\mathbf{x}(k)+\xi_k \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k)+h(k)\mathbf{R}(\mathbf{x}(k)))}{\partial \mathbf{z}}.$$

Здесь $\xi_k, \theta_k \in (0,1)$, $k = 0, 1, \ldots$

Зададим некоторое $H > 0$. Тогда если

$$h(k)\|\mathbf{x}(k)\|^{\mu-1} \leqslant H, \tag{3}$$

то имеем

$$\Delta V \leqslant -h(k)(a_4 - \beta\eta(H))\|\mathbf{x}(k)\|^{\gamma-1+\mu} + \alpha a_3(1+\alpha+\beta H)^{\gamma-1}\|\mathbf{x}(k)\|^{\gamma}.$$

Здесь $\eta(H) \to 0$ при $H \to 0$. В частности, если функция $V(\mathbf{z})$ дважды непрерывно дифференцируема при $\mathbf{z} \in R^n$, то $\eta(H) = MH + o(H)$, где

$$M = \max_{\|\mathbf{z}\|=1} \|\mathbf{W}(\mathbf{z})\|, \quad \mathbf{W}(\mathbf{z}) = \left\{\frac{\partial^2 V(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j}\right\}_{i,j=1}^{n}.$$

Будем считать, что величина H выбрана настолько малой, что $\beta\eta(H) < a_4$, и кроме того, $a_4 H < a_2$. В результате приходим к неравенству

$$\Delta V \leqslant pV(\mathbf{x}(k)) - qh(k)V^{1+r}(\mathbf{x}(k)), \tag{4}$$

где $r = (\mu-1)/\gamma$, $p = \alpha a_3(1+\alpha+\beta H)^{\gamma-1}/a_1$, $q = (a_4 - \beta\eta(H))/a_2^{1+r}$, $k = 0, 1, \ldots$

Для дальнейшего анализа нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых чисел λ, y, x, таких что $\lambda > 0$, $y > 0$ и $x < y^{-\lambda}$, будет справедливо неравенство*

$$\left(y - xy^{1+\lambda}\right)^{-\lambda} \geqslant y^{-\lambda} + \lambda x.$$

Введем обозначение

$$\nu(k_0, k) = \sum_{j=k_0}^{k} h(j)(1+p)^{-r(k-j+1)},$$

где $0 \leqslant k_0 \leqslant k$.

Рассмотрим решение $\mathbf{x}(k)$ системы (1), выходящее при $k = k_0 \geqslant 0$ из точки $\mathbf{x}_0 \in R^n$. Предположим, что это решение остается в области (3) при $k = k_0, \ldots, \bar{k}$. Тогда, применяя лемму 1 к неравенству (4), получим оценки

$$a_1^{-r}\|\mathbf{x}(\bar{k}+1)\|^{-(\mu-1)} \geqslant V^{-r}(\mathbf{x}(\bar{k}+1)) \geqslant$$

$$\geqslant \left((1+p)V(\mathbf{x}(\bar{k})) - qh(\bar{k})V^{1+r}(\mathbf{x}(\bar{k}))\right)^{-r} =$$

$$= (1+p)^{-r}\left(V(\mathbf{x}(\bar{k})) - qh(\bar{k})(1+p)^{-1}V^{1+r}(\mathbf{x}(\bar{k}))\right)^{-r} \geqslant$$

$$\geqslant (1+p)^{-r}V^{-r}(\mathbf{x}(\bar{k})) + rqh(\bar{k})(1+p)^{-(r+1)} \geqslant \ldots \geqslant$$

$$\geqslant (1+p)^{-r(\bar{k}-k_0+1)}V^{-r}(\mathbf{x}_0) + rq(1+p)^{-1}\nu(k_0, \bar{k}).$$

Используя данные оценки, нетрудно установить следующие рультаты.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение 1, и существует $K \geqslant 0$, такое что*

$$h(k+1) \leqslant Hrqa_1^r(1+p)^{-1}\nu(0,k) \tag{5}$$

при всех $k \geqslant K$. Тогда для любого $k_0 \geqslant 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, то решение $\mathbf{x}(k)$ системы (1) будет оставаться в области (3) при всех $k \geqslant k_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение 1, и существует $K \geqslant 0$, такое что при всех $k \geqslant K$ справедливо неравенство (5). Тогда если*

$$\nu(0,k) \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \tag{6}$$

то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание 1. *Легко можно проверить, что если величина α (и как следствие, величина p) достаточно мала, то условия (5) и (6) являются совместными.*

Следствие 1. *Пусть выполнено предположение 1, и $h(k) \equiv h > 0$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $k_0 \geqslant 0$ можно найти такие постоянные величины $\delta > 0$, $\hat{\alpha} > 0$, $k_1 \geqslant k_0$, что если $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ и $\alpha \leqslant \hat{\alpha}$, то $\|\mathbf{x}(k)\| < \varepsilon$ при $k \geqslant k_1$.*

Следствие 2. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда существует $\hat{\alpha} > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $k_0 \geqslant 0$ можно найти постоянные величины $\delta > 0$, $h > 0$, $k_1 \geqslant k_0$ так, что если $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, $h(k) \equiv h$ и $\alpha \leqslant \hat{\alpha}$, то $\|\mathbf{x}(k)\| < \varepsilon$ при $k \geqslant k_1$.*

Пример 1. Предположим, что $\alpha = 0$, т.е. в системе (1) отсутствует линейная часть. Применяя теорему 1, получаем, что если выполнено предположение 1, то для асимптотической устойчивости нулевого решения достаточно, чтобы имели место условия: $\sum_{j=0}^{k} h(j) \to +\infty$ и $h(k+1)/\left(\sum_{j=0}^{k} h(j)\right) \to 0$ при $k \to +\infty$. В частности, данные предельные соотношения будут справедливы, если $h(k) = 1/(k+1)$ или $h(k) = k$, $k = 0,1,\ldots$ Если же $h(k) = \omega^k$, $k = 0,1,\ldots$, где $\omega > 1$, то второе из этих соотношений, представляющее собой огрубление условия (5), выполняться не будет. В то же время, само условие (5) будет справедливым при значении ω достаточно близком к 1. При больших значениях ω гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого решения с помощью теоремы 1 нельзя.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{r} \mathbf{B}_j\, \mathbf{x}(k) u_j. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{x}(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))^T$ — вектор состояния системы; $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_r$ — матрицы размерности $(n \times n)$; $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)^T$ — управление; $k = 0,1,\ldots$

Система (7) относится к классу билинейных систем, широко используемому при моделировании многих управляемых процессов (см., например, [5]). Используя результаты из [5], положим

$$u_j = -h(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{B}_j^T\mathbf{A}\mathbf{x}(k), \quad j = 1,\ldots,r,$$

где $h(k)$ — неотрицательная скалярная функция, определенная при $k = 0,1,\ldots$; $\mathbf{A}$ — симметричная положительно определенная матрица. Тогда система, замкнутая управлением, примет вид (1), где

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}(k)) = -\sum_{j=1}^{r} \mathbf{B}_j \, \mathbf{x}(k) \left(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{B}_j^T \mathbf{A}\mathbf{x}(k)\right).$$

Функцию Ляпунова для данной системы будем искать в виде квадратичной формы

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z}.$$

Предположим, что матрицу $\mathbf{A}$ можно выбрать так, что при всех $\mathbf{z} \in R^n$ будет справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial V(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbf{R}(\mathbf{z}) = -\sum_{j=1}^{r} \left(\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{B}_j\mathbf{z}\right)^2 \leqslant -a_4\|\mathbf{z}\|^4,$$

где a_4 — некоторая положительная постоянная. Тогда предположение 1 будет выполнено, и можно применить полученные выше результаты. В данном случае имеем $\mu = 3$, $\gamma = 2$, $r = 1$.

Рассмотренный подход можно использовать и в случае, когда соответствующая однородная система (2) является нестационарной, т.е. когда $\mathbf{R} = \mathbf{R}(k, \mathbf{z})$, если только удастся построить подходящую функцию Ляпунова или хотя бы гарантировать ее существование.

3. Заключение

В работе были рассмотрены некоторые аспекты, связанные с нелинейной стабилизацией разностных систем. На основе метода функций Ляпунова для исследуемой системы строилось вспомогательное нестационарное разностное уравнение сравнения. С его помощью были установлены достаточные условия асимптотической и практической устойчивости нулевого решения. Отметим, что если для аналогичной дифференциальной системы указанный вопрос решается тривиально, то дискретный характер разностной системы вносит в анализ некоторые существенные ограничения и усложнения.

Список литературы

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 311 с.
2. Зубов В.И. Консервативные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений в нелинейной механике // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 4. С. 446-448.
3. Зубов В.И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.
4. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений нелинейных разностных систем // Изв. вузов. Математика. 2005. № 2. С. 3-12.
5. Gutman P.-O. Stabilizing Controllers for Bilinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. AC-26, No. 4. P. 917-922.