УДК 517.977 + 62-50

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧИ АДАПТИВНОГО СУБОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА

В.Ф. Соколов

Физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН

Россия, 167982, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24

E-mail: sokolov@dm.komisc.ru

Ключевые слова: адаптивное управление, оптимальное управление, робастное управление, ограниченное возмущение.

Аннотация: Рассматриваются варианты задачи субоптимального слежения для дискретного минимально-фазового объекта с неизвестной передаточной функцией, неопределенностью в канале выхода с неизвестным коэффициентом усиления и ограниченным внешним возмущением с неизвестной верхней границей.

1. Введение

Рассматриваются задачи субоптимального слежения для дискретного минимально-фазового объекта с неизвестной передаточной функцией, неопределенностью в канале выхода и ограниченным внешним возмущением. В отличие от систем с непрерывным временем без запаздывания в управлении, для которых ошибка слежения может быть сделана сколь угодно малой за счет сильной обратной связи, для систем с дискретным временем это невозможно ввиду наличия такого запаздывания. При этом постановка задачи асимптотически оптимального слежения зависит не только от априорной информации об объекте управления, внешнем возмущении и неопределенности, но и от априорной информации об ограниченном задающем сигнале. Онлайн оценивание неидентифицируемых параметров объекта и неизвестных верхних границ неопределенности и внешнего возмущения базируется на методе рекуррентных целевых неравенств [1, 2] и на оптимальном множественном оценивании [3, 4]. В рассматриваемой задаче показатель качества управления в форме наихудшей асимптотической ошибки слежения в классе допустимых неопределенностей, возмущений и задающих сигналов является дробно-линейной функцией указанных верхних границ, что позволяет использовать множественные оценки минимальной сложности.

2. Постановка задачи

Объект управления описывается моделью

$$a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}\,, \quad t = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{1}$$

где $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$ - выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени t, q^{-1} - оператор сдвига назад ($q^{-1}x_t := x_{t-1}$) и $a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$, $b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \ldots + b_m\lambda^{m-1}$. Априорная информация об объекте состоит из предположений:

Предположение 1. *Неизвестный вектор-столбец коэффициентов модели принадлежит известному ограниченному многограннику* Ξ*,*

$$\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^T \in \Xi = \{\, \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geqslant p \,\} \subset \mathbb{R}^{n+m}\,,\ P \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}\,,$$

для любого $\xi \in \Xi$ $\ b_1 \neq 0$ *и корни полинома* $b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \ldots + b_m\lambda^{m-1}$ *лежат вне замкнутого единичного круга* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ *(такие полиномы называются устойчивыми, а соответствующие им объекты - минимально-фазовыми).*

Предположение 2. *Суммарное возмущение* v *удовлетворяет неравенству*

$$|v_t| \leqslant \delta_w + \delta_y p_t\,, \quad p_t = \max_{t-\mu\leqslant s<t} |y_s| \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

с неизвестными $\delta_w, \delta_y \geqslant 0$*. Предполагается известной верхняя граница* $\bar{\delta}_y < 1$ *неизвестного коэффициента* δ_y*.*

В терминах теории робастного управления коэффициент δ_w является ℓ_∞-нормой внешнего ограниченного возмущения, а δ_y - коэффициентом усиления линейной нестационарной или нелинейной строго причинной неопределенности в канале выхода с памятью μ [5]. Память μ в описании модели может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для гарантируемого качества управления. Ограниченность памяти возмущений обеспечивает независимость асимптотического качества замкнутой системы управления от начальных данных [5], что необходимо для синтеза адаптивного управления.

Пусть $y^* = (y_1, y_2, \dots)$ - ограниченный задающий сигнал задачи слежения и показателем качества управления является наихудшая по всем допустимым возмущениям v асимптотическая ошибка слежения:

$$J^\mu(\theta, y^*) := \sup_v \limsup_{t\to+\infty} |y_t - y_t^*|\,, \quad \theta := (\xi^T, \delta_y, \delta_w)^T\,.$$

Для модели с известным вектором коэффициентов ξ и любыми начальными значениями $y_0, \dots, y_{-n+1}$, $u_0, \dots, u_{-m+1}$ регулятор

$$b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + y_{t+1}^* \tag{2}$$

обеспечивает равенство $y_{t+1} - y_t^* = v_{t+1}$ и, следовательно, является *оптимальным* для показателя качества $J^\mu(\theta, y^*)$.

Теорема 1. *Для модели* (1)*, удовлетворяющей Предположениям 1 и 2 и замкнутой регулятором* (2)*,*

$$J^\mu(\theta, y^*) \leqslant J(\theta) := \frac{\delta_w + \delta_y\|y^*\|_{ss}}{1 - \delta_y}\,, \quad \|y^*\|_{ss} := \limsup_{t\to+\infty} |y_t^*|\,.$$

Верхняя граница $J_1(\theta)$ *является точной при* $\mu \to +\infty$*, если значения* $|y_t^*|$ *равномерно часто попадают в окрестности точки* $\|y^*\|_{ss}$*.*

Теорема 1 следует из теорем 6 и 8 [5].

Асимптотически точная при $\mu \to +\infty$ верхняя оценка $J(\theta)$ будет служить основой для постановки задач *адаптивного субоптимального слежения*. Следующие две постановки соответствуют разной априорной информации о задающем сигнале y^*.

Задача 1. *Пусть в любой момент t известны y^*_{t+1} и верхняя оценка $\overline{\|y^*\|_{ss}} \geqslant \|y^*\|_{ss}$. Требуется построить обратную связь для объекта (1), гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t - y_t^*| \leqslant J_1(\theta) := \frac{\delta_w + \delta_y \overline{\|y^*\|_{ss}}}{1-\delta_y} .$$

Задача 2. *Пусть в любой момент t известно y^*_{t+1} и y^* - ограниченная последовательность. Требуется построить обратную связь для объекта (1), гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t - y_t^*| \leqslant J_2(\theta) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|_\infty}{1-\delta_y} , \quad \|y^*\|_\infty := \sup_t |y_t| .$$

В частном случае задачи регулирования, в которой $y^*_t = y^*$ при всех t, значение $\|y^*\|_{ss} = y^*$ известно и $J_1(\theta) = J(\theta)$.

Сложность сформулированных задач связана с тем, что при априорном Предположении 2 вектор коэффициентов ξ, норма внешнего возмущения δ_w и коэффициент усиления неопределенности δ_y не идентифицируемы, поскольку модель объекта с любым вектором коэффициентов согласована с любыми данными измерений $y_t, y_{t-1}, \ldots$ и $u_t, u_{t-1}, \ldots$ при выборе достаточно больших значений δ_w или δ_y. В силу этого обстоятельства стандартная консервативная постановка оптимальной задачи в рамках метода рекуррентных целевых неравенств [1], основанная на оценивании *только* неизвестного вектора коэффициентов ξ, требует дополнительного априорного предположения.

Предположение 3. *Известна верхняя граница $\overline{\delta}_w$ нормы внешнего возмущения δ_w.*

Задача 3. *Пусть в любой момент t известно y^*_{t+1}. Требуется при дополнительном Предположении 3 построить обратную связь для объекта (1), гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t - y_t^*| \leqslant J_3(\theta) := \frac{\overline{\delta}_w + \overline{\delta}_y \|y^*\|_{ss}}{1-\overline{\delta}_y} .$$

3. Адаптивное субоптимальное слежение на основе алгоритмов множественного оценивания

Решение консервативной Задачи 3 не требует оценки норм возмущений и достигается с помощью простых алгоритмов проекционного типа для оценивания неизвестного вектора ξ. Для решения субоптимальных Задач 1 и 2 необходимо онлайн оценивание вектора *всех* неизвестных параметров θ с помощью алгоритмов множественного оценивания и использование соответствующих показателей качества $J_1(\theta)$

и $J_2(\theta)$ в качестве идентификационных критериев [3]. Новая информация о неизвестном векторе θ в момент времени $t+1$ имеет вид неравенства

$$|a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_t| \leqslant \delta_w + \delta_y p_{t+1}\,. \tag{3}$$

Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления базируется на следующем очевидном утверждении. Если для некоторой оценки $\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^T$, $\hat{\xi} \in \Xi$, неравенства (3) выполняются при всех достаточно больших t, то модель (1) с вектором параметров $\hat{\theta}$ удовлетворяет априорным Предположениям 1 и 2 и согласована с данными измерений при всех достаточно больших t. Тогда для решения субоптимальных Задач 1 и 2 достаточно найти наилучшую относительно показателей качества $J_1(\theta)$ и $J_2(\theta)$ оценку $\hat{\theta}$, удовлетворяющую неравенствам (3) при всех достаточно больших t. Полная информация информация о неизвестном векторе θ в момент t имеет вид

$$\theta \in \Theta_0 \cap \Theta_t\,, \quad \Theta_0 := \{\ \hat{\theta}\ \big|\ \hat{\xi} \in \Xi\,,\ 0 \leqslant \delta_y \leqslant \bar{\delta}_y\,,\ \delta_w \geqslant 0\ \}\,,$$

$$\Theta_t = \{\ \hat{\theta}\ \big|\ |\hat{a}(q^{-1})y_{k+1} - \hat{b}(q^{-1})u_k| \leqslant \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{k+1}\ \forall k < t\ \}\,.$$

и выбор текущей оптимальной оценки θ_t^{opt} для решения Задач 1 или 2 сводится к решению *задачи оптимального оценивания*

$$\theta_t^{opt} = \operatorname*{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t}\ J_i(\theta)\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{4}$$

Формула (4) неприменима напрямую ввиду возможного неограниченного роста числа неравенств в описании множественных оценок Θ_t. Общий метод обеспечения ограниченности числа изменений множественных оценок посредством введения мертвой зоны при обновлении оценок был предложен для систем с внешним возмущением в [4] и для систем с неопределенностью - в [3]. Недостаток общего метода заключается в экспоненциальном росте объема вычислений при увеличении размерности вектора θ и при повышении точности решения оптимальной задачи (4).

Множественное оценивание минимальной сложности. Поскольку показатели качества $J_1(\theta)$ и $J_2(\theta)$ - дробно-линейные функции вектора θ, их поверхности уровня - гиперплоскости. Это позволяет ограничиться конусными множественными оценками C_t в форме $\dim\theta = n + m + 2$ линейных неравенств. Сформулируем алгоритм обновления конусных оценок C_t и векторных оценок θ_t. Выберем параметр мертвой зоны $0 < \varepsilon < 1 - \bar{\delta}_y$. Пусть $\theta_t = (\xi_t^T, \delta_{yt}, \delta_{wt})^T$ - векторная оценка неизвестного θ в момент t. В момент $t+1$ положим

$$\phi_t := (-y_t, -y_{t-1}, \ldots, -y_{t-n+1}, u_t, \ldots, u_{t-m+1})^T, \quad \eta_{t+1} := \operatorname{sign}(y_{t+1} - \phi_t^T \xi_t)\,,$$

$$\psi_{t+1} := (\eta_{t+1}\phi_t^T, p_y(t), 1)^T\,, \quad \zeta_{t+1} := \eta_{t+1} y_{t+1}\,.$$

В этих обозначениях неравенство (3) относительно вектора θ_t эквивалентно неравенству $\psi_{t+1}^T \theta_t \geqslant \zeta_{t+1}$. Положим

$$\theta_{t+1} := \theta_t,\ \ C_{t+1} := C_t, \quad \text{если}\ \ \psi_{t+1}^T \theta_t \geqslant \zeta_{t+1} - \varepsilon|\psi_{t+1}|\,.$$

В противном случае положим $\Omega_{t+1} := \{\ \hat{\theta}\ \big|\ \psi_{t+1}^T \hat{\theta} \geqslant \zeta_{t+1}\ \}$,

$$\theta_{t+1} := \operatorname*{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap C_t \cap \Omega_{t+1}}\ I_i(\hat{\theta})\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{5}$$

где при решении Задачи 2 неизвестный множитель $\|y^*\|_\infty$ в числителе $J_2(\theta)$ заменяется в момент $t+1$ рекуррентно вычисляемым множителем $\sup_{k\leqslant t+1}|y_k|$. В качестве точки минимума θ_{t+1} задачи дробно-линейного программирования (5), сводящейся к задаче линейного программирования, выбирается вершина многогранного множества $\Theta_0\cap C_t\cap\Omega_{t+1}$. Вершина θ_{t+1} является точкой пересечения границ $\dim\theta$ линейных неравенств из описания $\Theta_0\cap C_t\cap\Omega_{t+1}$. Конус C_{t+1} получается из C_t заменой любого из задающих конус C_t неравенств, на границе которого не лежит вектор θ_{t+1}, неравенством, задающим Ω_{t+1}. Формула (5) дополняется процедурой, позволяющей избежать зацикливания. Конусный алгоритм гарантирует, что неубывающие оценки гарантируемого качества слежения $J_i(\theta_t)$ не превосходят $J_i(\theta)$ для неизвестного и не идентифицируемого вектора θ. Доказательство ограниченности числа обновлений конусов получено для размерностей 2 и 3 [6] и остается открытой проблемой для размерностей выше трех.

Пусть управление в каждый момент t вычисляется оптимальным регулятором (2), соответствующим вектору оценок ξ_t, число обновлений оценок конечно, и θ_∞ - финальная оценка. Тогда ошибка слежения в замкнутой адаптивной системе удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{t\to+\infty}|y_t-y_t^*|\leqslant J_i(\theta_\infty)+O(\varepsilon)\leqslant J_i(\theta)+O(\varepsilon)\quad(\varepsilon\to 0)\,,$$

что гарантирует асимптотическую оптимальность слежения с точностью $O(\varepsilon)$. Заметим, что финальная оценка θ_∞ неизвестна. Однако отсутствие обновлений оценки θ_t на длительном промежутке влечет справедливость неравенств $|y_t-y_t^*|\leqslant J_i(\theta_t)+O(\varepsilon)$, при этом вычисляемое значение $J_i(\theta_t)$ может быть, в зависимости от реализации возмущений, существенно меньше неизвестной, но гарантируемой для класса всех возмущений оценки $J_i(\theta)$.

Отметим в заключение, что постановка консервативной оптимальной Задачи 3 не требует априорной информации о задающем сигнале и может оказаться предпочтительной, если априори неизвестное значение $\|y^*\|_{ss}$ существенно меньше $\|y^*\|_\infty$ и априорная информация о верхних границах $\bar\delta_y$ и $\bar\delta_w$ достаточно точна.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 18-1-1-7.

Список литературы

1. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
2. Bondarko V.A., Yakubovich V.A. Method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 1992. Vol. 6, No. 3. P. 141-160.
3. Sokolovv V.F. Closed-loop Identification for the Best Asymptotic Performance of Adaptive Robust Control // Automatica. 1996. Vol. 32, No. 8. P. 1163-1176.
4. Sokolov V.F. Adaptive suboptimal control of a linear system with bounded disturbances // Syst. Control Lett. 1985. Vol. 6. P. 93-98.
5. Sokolov V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty // Syst. Control Lett. 2001. Vol. 42. P. 363-377.
6. Соколов В.Ф. Адаптивное минимаксное управление на основе рекуррентного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 1993. № 12. С. 127–139.