

# УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЙ В ЦИФРОВЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

**С.В. Феофилов**

*Тульский государственный университет*  
Россия, 300012, Тула, пр. Ленина, 92  
E-mail: [svfeofilov@mail.ru](mailto:svfeofilov@mail.ru)

**А.В. Козырь**

*Тульский государственный университет*  
Россия, 300012, Тула, пр. Ленина, 92  
E-mail: [Kozyr\\_a\\_v@mail.ru](mailto:Kozyr_a_v@mail.ru)

**Ключевые слова** автоколебательные релейные системы управления, устойчивость автоколебаний, цифровые релейные системы управления.

**Аннотация:** Рассматриваются вопросы устойчивости движений в цифровых автоколебательных системах управления. Показано, что в случае устойчивого объекта управления дискретизация по времени в релейной системе приводит к потере асимптотической устойчивости периодического движения и возникновению множества различных периодических режимов. В случае неустойчивого объекта в замкнутой системе устанавливаются сложные движения. В работе предлагается точный метод определения всех возможных периодических движений. Он распространяет подход метода фазового годографа [1] на класс цифровых систем. При возникновении микрохаотических колебаний предложенный подход позволяет дать верхнюю оценку фазовой области, в которой существуют такие колебания. Предлагается два метода анализа устойчивости идентифицированных предельных циклов. Первый позволяет оценить устойчивость и область притяжения каждого предельного цикла. Во втором подходе для получения условий устойчивости используются квадратичные функции Ляпунова. Выполнение указанных условий гарантирует сходимость траектории цифровой релейной системы в ограниченную область, что может служить критерием практической устойчивости движений цифровой автоколебательной системы.

## 1. Введение

Релейные системы управления (PCY), в которых автоколебательный режим является рабочим, получили широкое распространение в технических системах. Анализ работы таких систем даже в случае линейного объекта управления является непростой задачей. Проблеме построения теории PCY, ориентированной на решение задачи синтеза систем с различного рода нелинейностями объекта управления, посвящено большое количество работ, выполненных на кафедре «Системы автоматического управления» Тульского государственного университета.

Центральным понятием метода является фазовый годограф (ФГ) релейной системы. Он характеризует частотные свойства объекта управления и служит универсальным инструментом как на этапе анализа, так и на этапе синтеза релейной системы. Метод фазового годографа ориентирован на применение современной вычислительной

техники и позволяет достаточно просто определить автономный режим работы релейной системы. В настоящее время метод фазового годографа достаточно полно разработан для релейных систем с двухпозиционным [1], трехпозиционным [2] управлением. Получены функции чувствительности периодического движения и точности режима слежения автоколебательной системы [3]. Метод показывает высокую точность для объектов управления как с гладкими нелинейностями (например насыщение, зона нечувствительности), так и с разрывными динамическими нелинейностями (например жесткий механический ограничитель). Данная теория строилась в первую очередь как прикладная и ориентирована на решение практических инженерных задач.

Представленный выше подход к проектированию регуляторов для релейных автоколебательных систем управления основан на исследовании схем, работающих в непрерывном времени. Однако в настоящее время такие регуляторы в основном имеют цифровую реализацию. Дискретизация релейного управления по времени приводит к потере асимптотической устойчивости периодического движения. Траектория дискретной системы сходится к некоторому компактному множеству [4,5]. В настоящей работе будут рассмотрены вопросы определения возможных движений в цифровых автоколебательных системах и предложен критерий устойчивости таких движений.

## 2. Математическое описание исследуемых систем

В работе будут рассматриваться цифровые релейные системы с линейным объектом. Структурная схема замкнутой системы управления приведена на рис. 1.

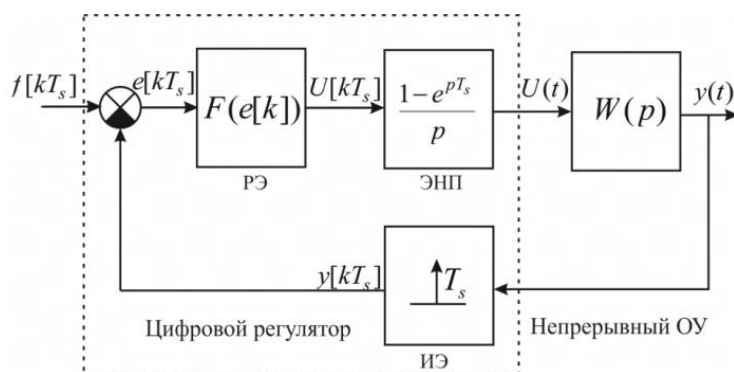


Рис. 1. Релейная автоколебательная система с цифровым управлением.

На схеме функция  $F(e[k])$  задает статическую характеристику двухпозиционного релейного элемента с гистерезисом. На его вход подается последовательность  $e[kT_s] = f[kT_s] - y[kT_s]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , где  $f[kT_s]$  – дискретный входной сигнал. Сигнал обратной связи формируется путем дискретизации непрерывного выходного сигнала  $y(t)$  с постоянным шагом квантования  $T_s$ . На объект управления в каждый интервал времени,  $kT_s \leq t < (k+1)T_s$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  поступает сигнал  $U(t)$ . На рис. 1, ЭНП – экстраполятор нулевого порядка, ИЭ – импульсный элемент,  $W(p)$  – объект управления. Математическая модель замкнутой системы может быть представлена в пространстве состояний

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T_s] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[kT_s] + \mathbf{\Psi}U[k] \\ y[kT_s] = \mathbf{C}^T \mathbf{x}[kT_s], \end{cases}$$

где  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  – вектор координат состояния, матрицы  $\Phi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  – собственная матрица,  $\Psi \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  – матрица управлений,  $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$  – матрица выхода. В системе (1) при  $f[kT_s] \equiv 0$  может установиться автоколебательный режим. На первом этапе проектирования автоколебательной следящей системы для последующего синтеза закона управления важно точно определить параметры автономных колебаний.

### 3. Определение периодических движений

В дискретной системе выходную последовательность с релейного элемента при симметричном периодическом режиме можно представить в виде решетчатой функции:

$$(2) \quad \begin{cases} U[k] = A, \text{ при } k = 1 + mN, 2 + mN, \dots, M + mN \\ U[k] = -A, \text{ при } k = M + 1 + mN, \dots, N + mN \end{cases}, m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $N = 2M$  – период колебаний.

Разложим периодический сигнал (2) в ряд Фурье [7]

$$(3) \quad U[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N C_n e^{jn\Omega_0 k},$$

где  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ , комплексный коэффициент  $C_n$  вычисляется в работе [6].

Сигнал на выходе непрерывной части при воздействии на вход дискретной последовательности (3)

$$(4) \quad y^*[M, \tau] = \frac{-1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{(1 - (-1)^n)}{\sin\left(\frac{\pi}{2M} n\right)} \text{Im}\left(W_m(jn\omega_0, \tau) e^{-im(M-0.5)/M}\right)$$

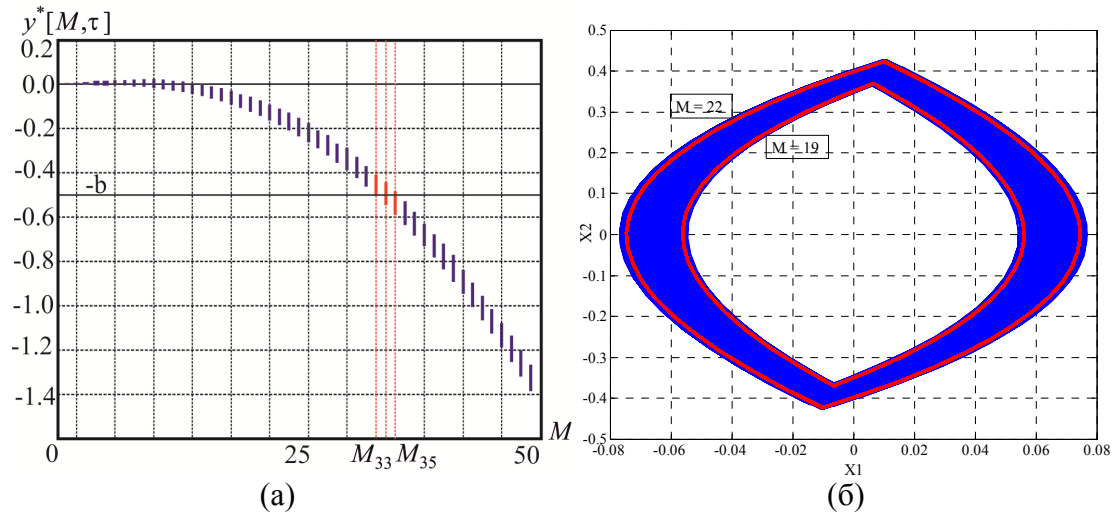
**Определение 1.** *R-характеристикой фазового годографа дискретной релейной системы будем называть функцию  $y^*[M, \tau]$ , зависящую от полупериода повторения  $M$  и  $\tau \in (0, T_s]$ , где  $T_s$  – период дискретизации, выделяющую все симметричные периодические движения. (Пример определения периодических движений в цифровой релейной системе приведен на рис. 1.)*

Симметричные периодические движения в системе можно определить, исходя из условий

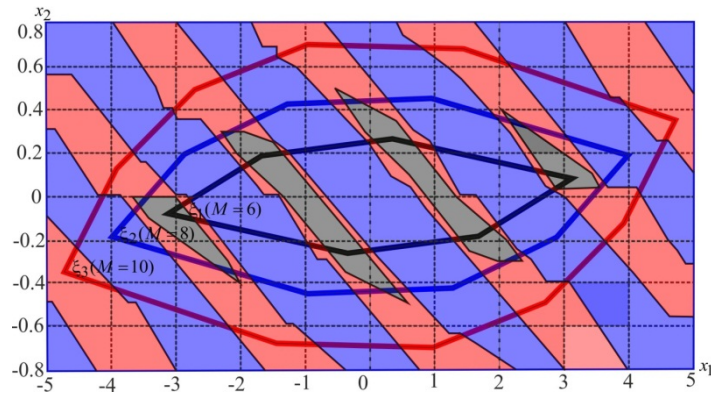
$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{x}^*[M] \geq -b, \\ \mathbf{C}\mathbf{x}^*[M-1] < -b. \end{cases}$$

В случае, если матрица дискретной системы  $\Phi$  является устойчивой, то есть все ее собственные числа находятся в окружности единичного радиуса, то в замкнутой релейной системе может существовать множество периодических решений с периодом  $N_k = 2Mk, k \in [1, 2, 3, \dots, n_{\max}]$ . Методика точного определения таких движений рассмотрена в работе [6]. Если  $\Phi$  является неустойчивой матрицей, то в автономной системе устанавливаются микрохаотические колебания [7], период повторения которых будет находиться в диапазоне  $N_1 \dots N_{\max}$ . На рис. 2(a) показано графическое определение симметричных периодических движений. В системе может существовать множество устойчивых периодических колебаний, причем если объект устойчив, то в автономной системе может установиться каждый из этих предельных циклов (рис. 3). В случае неустойчивой системы происходит биение между предельными циклами (устанавливаются так называемые микрохаотические колебания). Верхняя оценка области таких коле-

баний будет соответствовать предельному циклу с максимальной амплитудой, такой случай показан на рис. 2(б).



**Рис. 1.** (а) – Определение периодических колебаний, (б) – фазовый портрет цифровой релейной системы с неустойчивым объектом.



**Рис. 3.** Фазовый портрет цифровой автоколебательной системы.

## 4. Устойчивость периодических движений

Выявленный периодический режим только показывает, что такие колебания могут существовать в системе. Однако, это ничего не говорит об устойчивости данного режима или о диапазоне начальных условий, которые могут привести к конкретным установившимся колебаниям. Оценка устойчивости в дискретном случае имеет существенные особенности по сравнению с анализом устойчивости автоколебаний в непрерывной системе. Рассмотрим сначала периодические колебания в дискретной системе с устойчивой матрицей  $\Phi$ . В системе (2) может существовать несколько предельных циклов рис. 3. Для каждого предельного цикла можно определить точку, ему принадлежащую

$$(5) \quad \mathbf{x}^* [Mk, T_s] = (\Phi^M + \mathbf{I})^{-1} (\Phi^M - \mathbf{I}) (\Phi - \mathbf{I})^{-1} \Psi U_{\text{рел}}.$$

Рассмотрим траекторию движения дискретной системы с начальным условием  $\mathbf{x}^*_{N_k}$ . Пусть данная траектория в начальный момент времени получила некоторое конечное возмущение  $\Delta\mathbf{x}$  так, что  $\tilde{\mathbf{x}}[kT_s] = \mathbf{x}^*[MkT_s] + \Delta\mathbf{x}$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}^*[Mk, T_s] + \Delta\mathbf{x}) = -b + \xi_k, k = 1, 2, \dots, l,$$

Допустим, что возмущение  $\Delta\mathbf{x}$  достаточно мало и не приводит к переключению релейного элемента  $\Delta M = 0$ . Таким образом, возмущенная траектория с течением времени будет сходиться к определенному предельному циклу  $l$ , так что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\mathbf{x}}[kT_s] - \mathbf{x}[kT_s]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^M \Delta\mathbf{x}[kT_s].$$

Отличительной особенностью цифровых релейных систем является то, что релейный элемент переключается только в моменты времени кратные целому значению периода дискретизации  $T_s$ , а возмущение начальных условий  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \Delta$  может не изменить момент переключения релейного элемента. Таким образом, если в автономной системе (1) существует множество предельных циклов, то каждому предельному циклу соответствует область возмущений, которая не приводит к изменению сигнала на выходе релейного элемента. Каждому предельному циклу будет соответствовать область притяжения, внутри которой возмущение  $\Delta$  не приведет к изменению периода колебаний  $N_k$ . Указанное множество допустимых значений  $\Delta \in \mathbf{D}$  определяется следующей системой неравенств

$$\mathbf{D} = \begin{cases} (-1)^i \mathbf{C}^T \cdot e^{AMT_s} \Phi_N^i \Delta + b - \mathbf{C}^T \mathbf{x}^*_N \leq 0, \\ (-1)^{i+1} \mathbf{C}^T \cdot e^{A(M+1)T_s} \Phi_N^i \Delta - e^{-AT_s} (\mathbf{x}^*_N - \Psi \mathbf{C}) < 0, \\ \mathbf{C}^T (\mathbf{x}^*_N + \Delta) \geq b, \text{ если } U^- = U_p, \\ \mathbf{C}^T (\mathbf{x}^*_N + \Delta) > -b, \text{ если } U^- = -U_p, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Таким образом, задача определения допустимого множества возмущений эквивалентна задаче определения множества достижимости дискретной системы. Множество  $\mathbf{D}$  будет определять в фазовом пространстве ту область, из которой траектории системы  $\mathbf{x}[k]$  будут сходиться к предельному циклу  $(\mathbf{x}^*_N, N = 1, 2, \dots)$ . На **Ошибка! Источник ссылки не найден.** на модельном примере второго порядка показаны данные области. Как видно из рисунка области притяжения в релейных системах с дискретным временем являются несвязанными и имеют различные размеры.

С практической точки зрения нецелесообразно оценивать устойчивость каждого предельного цикла, так как их может быть достаточно много. Кроме того, в системах с неустойчивым объектом управления возникает режим биения между возможными предельными циклами. Более важно определить область устойчивости, попав в которую, фазовая траектория с течением времени ее не покинет. Таким образом, необходимо оценить устойчивость множества вложенных предельных циклов «сверху». Это будет гарантировать, что в автономной системе установится один из определенных предельных циклов  $N_k$ .

**Определение 2.**[8] Система (2.1) называется  $R\varepsilon$  – асимптотически устойчивой, если существуют некоторые заданные  $\varepsilon > 0$  и  $R > \varepsilon > 0$  такие, что любое решение  $\mathbf{x}[k]$  системы (1) с начальными условиями, находящимися внутри сферы  $\mathbf{x}[0] \in B(0, R)$ , будет асимптотически сходиться в шар  $B(0, \varepsilon)$ , то есть  $\mathbf{x}[k] \rightarrow B(0, \varepsilon)$ , при  $k \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим систему (1). Предположим, что в такой системе существует множество вложенных предельных циклов. Рассмотрим внешний предельный цикл, обозначим на-

чальное условие, ему принадлежащее  $\mathbf{x}_{M_{\max}}^*$ . Амплитуда колебаний, соответствующая такому предельному циклу, дает оценку максимального радиуса  $\varepsilon$  в релейной системе. Невозмущенное движение в системе (1) определяется равенством

$$\mathbf{x}[k] = \Phi^k \mathbf{x}^*[0] + \sum_{k=0}^n \Phi^k \Psi U[k] = \Phi^k \mathbf{x}[k] - (\Phi - I)^{-1} (\Phi^k - I) \Psi U_{\text{рел}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Начальное значение, соответствующее предельному циклу  $\mathbf{x}_{M_{\max}}^*$  задается (5). Будем считать, что периодическое решение является симметричным, то есть  $\mathbf{x}[M_{\max}] = -\mathbf{x}^*$ .

Пусть начальное условие, соответствующее предельному циклу, в начальный момент времени получило некоторое конечное возмущение  $\Delta$ . Далее будем считать, что возмущение  $\Delta$  является достаточно большим, что приводит к смещению момента переключения релейного элемента. Таким образом, следующее переключение релейного элемента произойдет внутри слоя поверхностей переключения  $S \in -b + \xi_k$  в момент времени  $k \in M_{\max} + \Delta M$ , причем  $\mathbf{x}[\Delta M_{\max}] = -\mathbf{x}^* - \Delta_1$ . Существует дискретное отображение  $\Delta_1 = T[k, \varepsilon] \Delta$

$$(6) \quad T[k, \varepsilon] = \left( \frac{O[k]C}{CO[k]} - I \right) \Phi^k,$$

$$O[k] = \Phi^k \mathbf{x}^* - \Phi^{M_{\max}} \mathbf{x}^* - (\Phi - I)^{-1} (\Phi^k - I) \Psi U_{\text{рел}} + (\Phi - I)^{-1} (\Phi^{M_{\max}} - I) \Psi U_{\text{рел}}.$$

$$(7) \quad \mathbf{P} - \mathbf{T}[k, \xi]^T \mathbf{P} \mathbf{T}[k, \xi] > 0.$$

Для того чтобы доказать, что полученное нелинейное отображение сжимается, потребуем чтобы в каждой точке  $k$  существовала положительно определенная матрица Ляпунова  $\mathbf{P}$  и выполнялось условие (7). Для устойчивого объекта диапазон значений  $k$  можно выбрать по аналогии с работой [9]. В случае неустойчивой разомкнутой системы можно задаться некоторым конечным значением  $k$  и проверить выполнение условия (7), что будет обеспечивать локальную практическую устойчивость в смысле определения 2.

## 5. Заключение

В работе предложены новые методы определения периодических движений в цифровых автоколебательных системах. Они позволяют выделить все возможные симметричные колебания при устойчивом объекте управления и оценить диапазон хаотических движений в случае неустойчивого объекта. Предлагается два новых подхода к анализу устойчивости таких движений. Первый метод применим к системам с детерминированными периодическими движениями и позволяет оценить устойчивость и область притяжения каждого предельного цикла. Второй метод является универсальным и оценивает практическую устойчивость движений в релейных системах с дискретизацией. Оценка устойчивости основана на решении системы линейных матричных неравенств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-01141).

## Список литературы

1. Фалдин Н.В., Феофилов С.В. Исследования периодических движений в релейных системах, содержащих звенья с ограничителями // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 15-27.
2. Феофилов С.В. Периодические движения в релейных системах с трехпозиционным управлением и ограничителями в объекте регулирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 5. С. 11-17.
3. Моржов А.В., Фалдин Н.В. Функции чувствительности характеристик автоколебаний в релейных системах с нелинейным объектом управления. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 6. С. 14-24.
4. Bazanella, A.S., Pereira, L.F.A., Parraga, A. A new method for PID- tuning including plants without ultimate frequency // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2017. Vol. 25, No. 2. P. 637-644.
5. Koch S., Horn M. Frequency domain analysis of sampled variable structure systems // IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control. Melbourne, Australia, 2017, December 12-15. P. 6684-6670.
6. Феофилов С.В., Козырь А.В. Периодические процессы в релейных автоколебательных системах с цифровым управлением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. № 6. С. 135-147.
7. Kowalczyk P. Micro-chaos in relay feedback systems with bang-bang control and digital sampling // IFAC Proceedings Volumes. 2011, Vol. 44, No. 1. P. 13305-13310.
8. Govindaswamy S., Hetel L., Polyakov A. On relay control for discrete time systems using linear matrix inequalities // European Control Conference. Strasbourg, France, 2014 June 24-27. P. 2225-2230.
9. Jorge M. Goncalves: [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://web.mit.edu/jmg/www/>