УДК 517.97

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РЕСУРСОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СЛАБО ХАОТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

С.М. Хрящев

ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова

Россия, 198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7

E-mail: khryashchev.sm@yandex.ru

Ключевые слова: управление хаосом, ресурсы управления.

Аннотация: Рассматриваются конечномерные системы управления с дискретным временем, имеющие сложное поведение траекторий. Известно, что время управления системой с базовой составляющей гиперболического типа значительно меньше времени управления системой с базовой составляющей изометрического типа. Этот факт приводит к мысли распределять имеющиеся ресурсы управления так, чтобы часть из них направлять на улучшение свойств управляемости и на управление состояниями системы, а часть – на создание хаоса, т.е. на управление хаосом. Решается задача, в каких пропорциях следует взять эти составляющие части, чтобы обеспечить наименьшее время управления.

1. Введение

Рассматривается семейство гладких отображений $f(.,u) : X \to X$, зависящих от параметра $u \in U$, которые действуют по формуле $x \to f(x,u)$. Здесь $X = \{x\}$ – конечномерное компактное множество (некоторое многообразие размерности n в пространстве R^n), $U = \{u\}$ – конечномерное компактное локальное множество (некоторая замкнутая окрестность выделенного значения $u_0 \in R^m$). Отображение $f_0(.) = f(., u_0)$ называется базовым, отображение $f_1(.) = \frac{\partial f}{\partial u}(., u_0)$ называется вспомогательным. Для простоты будем считать, что $m = 1$ и $u_0 = 0$. Считая значения параметра u достаточно малыми, далее будем рассматривать локальные семейства отображений следующего вида

$$f_0(.) + uf_1(.) : X \to X, \quad u \in U. \tag{1}$$

Семейство отображений (1) определяет систему управления вида

$$x_{t+1} = f_0(x_t) + u_t f_1(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $u_t \in U$ – значение управляющего параметра в момент времени t, такое что $|u_t| \leqslant \overline{u}$, где $\overline{u}$ – некоторый уровень управлений.

Базовое отображение является глобальным и используется для приближенного управления на множествах больших пространственных размеров, вспомогательное отображение является локальным и используется для точного управления в окрестности отдельных точек или траекторий.

Далее рассматриваются базовые отображения гиперболического и изометрического типов. Эти отображения имеют следующие качественные особенности. Отображения гиперболического типа растягивают множества вдоль одних направлений и сжимают множества вдоль других направлений. Поэтому из-за компактности пространства состояний X отображения f_0 гиперболического типа порождают траектории, имеющие сложное поведение. В частности, они могут иметь периодические траектории сколь угодно большого периода и всюду плотные траектории.

Отображения изометрического типа сохраняют расстояния между фиксированными точками множеств и, следовательно, сохраняют объемы множеств. Отображения изометрического типа порождают нейтрально устойчивые траектории. Они могут иметь всюду плотные траектории.

Свойства рассматриваемых базовых отображений можно описать следующим образом. Для отображения $f_0(x)$ рассмотрим его матрицу Якоби $\frac{\partial f_0}{\partial x}(x) =: A(x)$. Будем считать, что для любого x значения $|\det A(x)|$ положительны и отделены от нуля.

Если отображение f_0 гиперболическое, то сужение $A^+(x) = A(x)|_{E^+(x)}$ будем называть матрицей Якоби в неустойчивом направлении $E^+(x)$, а сужение $A^-(x) = A(x)|_{E^-(x)}$ — матрицей Якоби в устойчивом направлении. Следовательно,

$$\det A(x) = \det A^+(x) \det A^-(x),$$

где

$$|\det A^+(x)| > 1, \quad |\det A^-(x)| < 1.$$

Значение $\rho^+(x) = \ln|\det A^+(x)|$ называется коэффициентом объемного растяжения в точке x вдоль неустойчивого направления. Введем равномерный коэффициент объемного растяжения вдоль неустойчивого направления по формуле

$$\underline{\rho}^+ = \min_{x\in X} \rho^+(x).$$

Коэффициент растяжения $\underline{\rho}^+$ можно считать количественной мерой хаотичности базового отображения системы. Значение его является некоторой оценкой энтропии отображения f_0, [1, 2].

Если f_0 является отображением изометрического типа, то для любого $x \in X$ величина $\det A_0^+(x) = 1$, поэтому величина $\rho_0^+(x) = 0$ для всех x. Таким образом, отображения изометрического типа не являются хаотическими.

Далее опишем взаимное отношение базового и вспомогательного отображений f_0 и f_1, которое определяет свойства локальной управляемости. Обозначим $B(x) = f_1(x)$. Определим матрицу локальной управляемости $C(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$, где для $k = 1, \dots, n$ столбцы вычисляются по следующим формулам

$$c_k(x) = A(f_0^{n-1}(x)) \cdots A(f_0^k(x)) B(f_0^{k-1}(x)), \quad c_n(x) = B(f_0^{n-1}(x)). \tag{3}$$

Далее определим матрицу $L(x) = [C(x)C^T(x)]^{\frac{1}{2}}$ и обозначим $\underline{l} = \min_{x\in X} \underline{l}(x)$, где $\underline{l}(x)$ – наименьшее собственное число матрицы $L(x)$.

В работах [1, 2] получены верхние оценки времен управления для систем гиперболического и изометрического типов, которые даются соответственно следующими асимптотическими при $\overline{u} \to 0$ формулами

$$\overline{T}_h(\overline{u}) = \frac{1}{\underline{\rho}^+} \ln \frac{R}{\underline{l}\overline{u}}, \tag{4}$$

$$\overline{T}_i(\overline{u}) = \frac{R}{\underline{l}\overline{u}}, \tag{5}$$

где значение R характеризует размер множества пространства состояний, в котором производится управление. Такие оценки могут быть полезны при проектировании систем в дискретном времени, [3–5].

Из формул (4), (5) легко видеть, что при малых значениях параметра $\overline{u}$ время управления системой с базовой составляющей гиперболического типа значительно меньше времени управления системой с базовой составляющей изометрического типа, [1,2]. Этот факт приводит к мысли распределять имеющиеся ресурсы управлений так, чтобы часть из них направлять на управление состояниями системы, а часть на создание хаоса (на управление хаосом) и на улучшение свойств локальной управляемости. Далее исследуются случаи, когда это целесообразно делать.

Предположим, что в каждый момент времени мы располагаем некоторым ресурсом z, значение которого можно представить в виде суммы $z = u + v + w$, где

$$u = k_u z, v = k_v z, w = k_w z, \quad k_u + k_v + k_w = 1. \tag{6}$$

Величина u идет на управление состояниями системы, величина v идет на создание хаоса, величин w идет на обеспечение локальной управляемости системы. Ставится задача, в каких пропорциях следует взять эти составляющие части, чтобы обеспечить наименьшее время управления.

2. Описание возмущенных систем управления

Для решения поставленной задачи используется следующую модель. Пусть имеется семейство отображений вида

$$\tilde{f}(., u, v, w) : X \to X, \quad u \in U, v \in U, w \in U. \tag{7}$$

Это семейство отображений будем рассматривать как семейство отображений, которое возмущает исходное семейство (1), т.е. семейство $\tilde{f}(., u, 0, 0) = f(., u)$. Далее для простоты знак $\sim$ будем опускать.

Поскольку отображение $f(., u, v, w)$ вида (7) предполагается гладко зависящим от параметров, то для достаточно малых значений величин $u, v, w \in U$ мы будем рассматривать лишь главные (линейные) части выражений, рассмотренных в предыдущем разделе и возмущенных по параметрам v, w. В частности, для коэффициентов $\underline{\rho}^+$ и $\underline{l}$ имеются следующие асимптотики

$$\underline{\rho}^+(v) = \underline{\rho}_0^+ + v\underline{\rho}_1^+ + o(v), \tag{8}$$

$$\underline{l}(v, w) = \underline{l}_0 + v\underline{l}_1' + w\underline{l}_1'' + o(v, w). \tag{9}$$

Далее будем рассматривать отдельно случаи $\underline{l}_0 > 0$ и $\underline{l}_0 = 0$.

В следующих разделах рассматриваются три вида возмущений семейств отображений вида (1).

2.1. Ресурсы идут на управление хаосом, на улучшение локальной управляемости и на локальное управление

В этом случае возмущенное семейство определенно по формуле

$$f(x, u, v, w) = [f_0(x) + vg_0(x)] + u[f_1(x) + wg_1(x)] \quad x \in X, \quad u, v, w \in U. \tag{10}$$

При $v = w = 0$ семейство отображений (10) переходит в семейство отображений (1). Семейство отображений $f_0(x) + vg_0(x)$, $v \in U$, зависящее от параметра v, называется возмущенным базовым отображением. Мы будем предполагать, что для

$v > 0$ отображения $f_0(x) + vg_0(x)$ являются гиперболическими, причем устойчивые и неустойчивые подпространства не зависят от параметра v (зависят только от x).

Семейство (10) порождает семейство динамических систем управления

$$x_{t+1} = [f_0(x_t) + vg_0(x_t)] + u_t[f_1(x_t) + wg_1(x_t)], \tag{11}$$

где u_t — воздействия, управляющие состояниями системы, v, w — параметры, возмущающие исходную систему. Параметр v интерпретируется как параметр, управляющий хаосом, параметр w интерпретируется как параметр, влияющий на свойства локальной управляемости системы. Если исходное базовое отображение f_0 имело изометрический тип, т.е. $\underline{\rho}_0^+ = 0$, то рассматриваемую ситуацию можно интерпретировать как управление в условиях слабого хаоса.

В силу формул (4), (9) имеется следующая асимптотическая оценка сверху времени управления для каждой ДСУ из семейства (10) с параметрами v, w для $\underline{\rho}_0^+ = 0$

$$T_h(\overline{u}, v, w) \sim \frac{1}{v\underline{\rho}_1^+} \ln \frac{R}{(\underline{l}_0 + \underline{l}_1' v + \underline{l}_1'' w)\overline{u}}, \quad v > 0. \tag{12}$$

2.2. Ресурсы идут на улучшение локальной управляемости и локальное управление

В этом случае возмущенное семейство определенно по формуле

$$f(x, u, v, w) = f_0(x) + (u + v)[f_1(x) + wg_1(x)] \quad x \in X, \quad u, v, w \in U. \tag{13}$$

Семейство (13) порождает семейство динамических систем управления вида

$$x_{t+1} = f_0(x_t) + (u_t + v)[f_1(x_t) + wg_1(x_t)], \quad t = 1, 2 \ldots, \tag{14}$$

где $u_t + v$ — воздействия, управляющие состояниями системы, параметр w интерпретируется как управляющий локальными свойствами системы. Тогда в силу формул (5) и (9) при $\underline{l}_1' = 0$ и $\underline{l}_1'' = \underline{l}_1$ оценка времени управления имеет вид

$$T_i^1(\overline{u}, v, w) \sim \frac{R}{(\underline{l}_0 + \underline{l}_1 w)} \frac{1}{\overline{u} + v}. \tag{15}$$

2.3. Все ресурсы идут на локальное управление

В этом случае возмущенное семейство определено по формуле

$$f(x, u, v, w) = f_0(x) + (u + v + w)f_1(x), \quad x \in X, \quad u, v, w \in U. \tag{16}$$

Семейству отображений (16) соответствует система управления

$$x_{t+1} = f_0(x_t) + (u_t + v + w)f_1(x), \quad x \in X. \tag{17}$$

В этом случае все имеющиеся ресурсы идут на управление состояниями системы. Так как f_0 — отображение изометрического типа, то в силу формулы (5) оценка времени управления дается формулой

$$T_i^2(\overline{u}, v, w) \sim \frac{R}{\underline{l}_0} \frac{1}{\overline{u} + v + w}. \tag{18}$$

3. Сравнение времен управления для возмущенных гиперболических и изометрических систем

В этом разделе сравниваются времена управления для систем, рассмотренных в разделе 2., при распределении ресурсов управления в соответствии с формулой (6).

Рассмотрим сначала случай локальной управляемости невозмущенной системы, т.е. $\underline{l}_0 > 0$. Для времен управления, определенных соответственно формулами (12), (15), (18), справедливы неравенства $T_h > T_i^1 > T_i^2$, которые можно записать в виде

$$\frac{1}{v\underline{\rho}_1^+} \ln \frac{R}{\underline{l}_0 u} > \frac{R}{\underline{l}_0} \frac{1}{u+v} > \frac{R}{\underline{l}_0} \frac{1}{u+v+w}, \tag{19}$$

так как неравенства (19) при достаточно малых u, v, w эквивалентны следующим очевидным неравенствам

$$\frac{1}{\underline{\rho}_1^+} \ln \frac{R}{\underline{l}_0 u} > \frac{R}{\underline{l}_0} \frac{v}{u+v} > \frac{R}{\underline{l}_0} \frac{v}{u+v+w}.$$

Формула (19) имеет следующую интерпретацию. Если система (2) с базовой составляющей f_0 изометрического типа локально управляема, то создание хаоса для этой системы не уменьшает времени управления, а именно $T_i^1(z) = o(T_h(z))$ при $z \to 0$, где в соответствии с формулами (12) и (18) имеются следующие соотношения

$$T_h(z) \sim C_1 \frac{1}{z} \ln \frac{1}{z}, \quad T_i^2(z) \sim C_2 \frac{1}{z}, \quad z \to 0.$$

Рассмотрим теперь случай локальной неуправляемости невозмущенной системы изометрического типа, т.е. $\underline{l}_0 = 0$. В этом случае в соответствии с формулами (12) и (15) для времен управления T_h и T_i^1 имеются следующие соотношения для времен управлений.

$$T_h(z) = \frac{1}{k_v z \underline{\rho}_1^+} \ln \frac{R}{(\underline{l}_1' k_v z + \underline{l}_1'' k_w z) k_u z} \sim C_1 \frac{1}{z} \ln \frac{1}{z}, \tag{20}$$

$$T_i^1(z) = \frac{R}{\underline{l}_1 k_w z} \frac{1}{(k_u z + k_v z)} \sim C_3 \frac{1}{z^2}. \tag{21}$$

Очевидно, что $T_h(z) = o(T_i^1(z))$ при $z \to 0$. Это означает, что одну часть ресурсов управления следует тратить на создание хаоса, а остальное на локальное управление. Величина $C_1 = \frac{1}{k_v \underline{\rho}_1^+}$. Отсюда следует, что чем больше величина $k_v \in (0, 1)$ в формуле (20), тем меньше время управления.

Список литературы

1. Хрящев С.М. Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. I // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 51-67.
2. Хрящев С.М. Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. II // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 102-113.
3. Khryashchev S.M. Probabilistic Methods for Switching Control in Discrete Time // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2016. Vol. 19. No. 1. P. 62-70.
4. Khryashchev S.M. On Some Metric Characteristics of Polysystems with Control Switchings in Discrete Time // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. vol. 20. No. 3. P. 229-237.
5. Квитко А.Н. Об одном методе решения граничной задачи для нелинейной управляемой системы в классе дискретных управлений // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 1. С. 1499-1509.