УДК 681.5

К ПРЕЦИЗИОННОЙ КАЛИБРОВКЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУПНОГАБАРИТНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

А.В. Данеев
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, 664074, Иркутск, Чернышевского ул., 15
E-mail: daneev@mail.ru

А.В. Лакеев
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134
E-mail: lakeyev@icc.ru

В.А. Русанов
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134
E-mail: v.rusanov@mail.ru

М.В. Русанов
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, 664074, Иркутск, Чернышевского ул., 15
E-mail: rusanovmark@mail.ru

Ключевые слова: нелинейная дифференциальная реализация, теория Морса, юстировка идентифицированной модели.

Аннотация. На базе действия подобия, индуцированного матричными группами преобразований (полной линейной и специальной ортогональной), предложен метод построения оптимального апостериорного базиса в конфигурационном пространстве идентифицированной нелинейной дифференциальной модели демпфированных колебаний крупногабаритной космической конструкции; последнее означает минимизацию параметрического рассогласования между «эталонной» (проектно-расчетной) и идентифицированной моделями в классе систем, индуцированных групповыми преобразованиями. Результаты статьи имеют приложения в прецизионном апостериорном математическом моделировании (по данным натурных испытаний) уравнений адаптивной космодинамики, попутно генерируя теоретико-прикладные постановки для дифференциальной реализации сложных гиперболических систем.

1. Введение

Прецизионное моделирование нелинейной динамики крупногабаритных космических конструкций (ККК), собираемых на орбите, относится к числу наиболее важных и трудных проблем современной космодинамики, что обусловлено жесткими требованиями к точности ориентации и стабилизации большеразмерных космических аппаратов [1, 2]. Дифференциальные модели таких конструкций определяются их инерционными, жесткостными и диссипативными характеристиками, в связи с чем большую роль играют экспериментальные методы орбитального анализа, как линейных [3-5], так и нелинейных [6-8] моделей ККК-динамики. При этом современные методы апостериорного моделирования позволяют выбрать оптимальную структуру ККК-модели с целью формирования адаптивного контура ККК-стабилизации [1]. На языке качественной теории дифференциальной реализации термин «оптимальная» предполагает минимальную динамическую размерность (МДР) модели [6, 7] и ее прецизионную калибровку (относительно некоторой «эталонной» модели [9]) в классе подобных МДР-систем вида «объект–регулятор–наблюдатель», индуцированных матричными группами преобразований [10], над идентифицированной ККК-МДР-моделью.

2. Терминология и постановка задач прецизионной юстировки ККК-МДР-модели

Ниже приведем сведения из пространств модулей систем дифференциальной реализации, которые являются, по существу, лишь кратким списком обозначений, понятий и основных предварительных фактов, после чего сформулируем ряд задач по определению (вычислению) предпочтительной системы (в рамках задачи калибровки) динамической реализации на семействе подобных моделей «объект – регулятор – наблюдатель», индуцированных матричными группами преобразований. При этом по возможности теоретический акцент будет делаться на соответствие формальных МДР-моделей практической реальности [4, 5] (мотивирующие детали см. также во введении [9]).

Пусть, как обычно, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ – множество всех $n\times m$-матриц над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (соответственно $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ – пространство матриц над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – полная линейная группа степени n над $\mathbb{R}$ и $\mathrm{SO}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – специальная ортогональная группа; отметим, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ является неограниченным несвязным открытым n^2-многообразием, соответственно SO_n – связное компактное $n(n-1)/2$-многообразие (следствие 0.2.4 [10]); везде ниже верхний индекс «$^{\mathrm{T}}$» молчаливо означает операцию матричного транспонирования.

Рассмотрим на временной полуоси $[0,\infty)\subset\mathbb{R}$ уравнения (см. систему (2) [2]) углового движения ККК в виде нелинейной векторно-матричной дифференциальной МДР-системы второго порядка

$$(1)\qquad \begin{aligned} &d^2x(t)/dt^2 + Ddx(t)/dt + Ax(t) = B_1u(t) + B_2\hat{u}(dx(t)/dt, x(t)),\\ &y(t) = C_1x(t) + C_2dx(t)/dt \end{aligned}$$

с состояниями $x(t)$ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$, программным управлением $u(t)\in\mathbb{R}^m$, вектор-функцией нелинейных связей $\hat{u}(dx(t)/dt, x(t))\in\mathbb{R}^q$ (возможно сформированной в парадигме «feedback»), выходами $y(t)\in\mathbb{R}^p$ и матрицами соответствующих размерностей:

$$\begin{aligned} &D, A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ B := (B_1, B_2) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})\times M_{n\times q}(\mathbb{R}),\\ &C := (C_1, C_2) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})\times M_{p\times n}(\mathbb{R}); \end{aligned}$$

далее примем $B \in M_{n\times(m+q)}(\mathbb{R}), C\in M_{p\times 2n}(\mathbb{R})$, при этом полагаем, что $\operatorname{rank} C = p$.

Считаем, что система уравнений (1) получена *a posteriori* в результате минимальной дифференциальной реализации [3–7] некоторого фиксированного семейства управляемых процессов движения ККК. Это определяет матричную «модель-представление»

МДР-реализации, т.е. упорядоченную четверку (D, A, B, C) в виде фиксированной точки декартова пространства

$$\mathfrak{R}(\mathbb{R}) := M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times(m+q)}(\mathbb{R}) \times M_{p\times 2n}(\mathbb{R}).$$

Переход к новому «*апостериорному*» базису в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$ на базе трансформирующей матрицы $S \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ изменяет координаты модели (1) по формуле $z := Sx$ и преобразует уравнения (1) в эквивалентную им дифференциальную систему

(2) $$d^2z(t)/dt^2 + SDS^{-1}dz(t)/dt + SAS^{-1}z(t) = SB_1u(t) + SB_2\hat{u}(S^{-1}dz(t)/dt, S^{-1}z(t)),$$
$$y(t) = C_1S^{-1}z(t) + C_2S^{-1}dz(t)/dt.$$

Уравнения (2) определяют [10] вещественно-аналитическое действие группы Ли $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ на множестве матричного представления дифференциальных систем (2) согласно правила

$$\rho_{\mathrm{GL}} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{R}(\mathbb{R}),$$
$$(S,(D,A,B,C)) \mapsto \rho_{\mathrm{GL}}(S,(D,A,B,C)) = (SDS^{-1}, SAS^{-1}, SB, (C_1S^{-1}, C_2S^{-1})),$$

называемое *действием подобия* на $n(2n+m+q+2p)$-многообразии $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$.

Действие подобия ρ_{GL} задает на $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$ отношение эквивалентности $\sim$, а именно:

$$(D', A', B', C') \sim (D, A, B, C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : (D', A', B'C') = (SDS^{-1}, SAS^{-1}, SB, (C_1S^{-1}, C_2S^{-1})).$$

В этом положении классы эквивалентности

$$[D, A, B, C]_{\mathrm{GL}} := \{(SDS^{-1}, SAS^{-1}, SB, (C_1S^{-1}, C_2S^{-1})) : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

отношения $\sim$ называются [10] *орбитами* действия ρ_{GL}. Фактор-пространство по отношению $\sim$ называется *пространством орбит* действия ρ_{GL} и обозначается через

$$\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}) := \mathfrak{R}(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

В пространстве орбит $\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R})$ имеется естественная топология [10], называемая фактор-топологией и являющаяся самой тонкой из всех возможных топологий на $\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R})$, для которых непрерывно каноническое естественное отображение

$$\pi_{\mathrm{GL}} : \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}),\ (D,A,B,C) \mapsto \pi_{\mathrm{GL}}(D,A,B,C) = [D,A,B,C]_{\mathrm{GL}}.$$

Пространство орбит называют [9] *пространством модулей* многообразия динамических систем минимальной (по индексу n) дифференциальной реализации; по существу это означает, что его точки параметризуют орбиты действия ρ_{GL}.

Перечисленные конструкции переносятся на действие подобия $\rho_{\mathrm{SO}} : \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{R}(\mathbb{R})$ по специальной ортогональной группе SO_n; можно показать [11, с. 120], что SO_n – связная компонента ортогональной группы O_n, при этом справедливо равенство $\mathrm{SO}_n = \cup\{U^k : k = 1,2,\ldots\}$, где U – любая окрестность единицы в SO_n (см. п. (в) предложения 1 [11, с. 118]), в этом положении $\mathfrak{R}^{\mathrm{SO}}(\mathbb{R})$ хаусдорфово, отображение π_{SO} замкнутое (теорема I.3.1 [10]). Поэтому далее индекс «GL» (соответственно «SO ») подтверждает действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (соответственно SO_n).

Рассмотрим матричнозначное отображение $\eta_{\mathrm{GL/SO}}$ и функционалы f_{GL}, g_{SO} вида

$$\eta_{\mathrm{GL}} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}),\ (S, A', A'') \mapsto \eta_{\mathrm{GL}}(S, A', A'') := SA'S^{-1} - A'.$$

Фиксируя базовую терминологию, далее будем называть $(A, \hat{A})$-параметризированную матричнозначную функцию $\eta_{\mathrm{GL}}(\cdot, A, \hat{A}) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, где $A \in M_n(\mathbb{R})$ и $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \{(SAS^{-1}) : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$ заданы, GL-*юстировкой матриц* A, $\hat{A}$ под действием подобия ρ_{GL} .

Постановки задач: для матрицы A реализации (1) и «эталонной» $n \times n$-матрицы позиционных сил $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \{(SAS^{-1}) : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$ для модели (2) найти решения задач (a) – (c):

(a) в терминах жордановой A-структуры установить достаточные условия разрешимости задачи оптимизации GL-юстировки вида: существует матрица $S^* \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, для которой

$$\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S^*, A, \hat{A})\right\| = \inf\{\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S, A, \hat{A})\right\| : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\};$$

(b) показать разрешимость задачи оптимальной SO-юстировки вида: для любой «эталонной» матрицы $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \{(SAS^{-1}) : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$, найдется такая матрица $S^{**} \in \mathrm{SO}_n$, что

$$\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S^{**}, A, \hat{A})\right\| = \inf\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S, A, \hat{A})\right\| : S \in \mathrm{SO}_n\};$$

(c) построить характеристическое уравнение для матрицы S^{**} задачи (b),
где $\|\cdot\|$ – евклидова норма (l_2-норма) в $M_n(\mathbb{R})$; ниже используем факт $\|S\|^2 = \mathrm{tr}\,(S^{\mathrm{T}}S)$. $\eta_{\mathrm{SO}}(\cdot,\cdot, A'') : \mathrm{SO}_n \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ – замкнутое отображение (теорема I.1.2 [10]).

Задачи (a)–(c) (и им подобные [4]) мотивируется определением через действие подобия ρ_{GL} «оптимальной» дифференциальной реализации (2) посредством калибровки идентифицированной ККК-МДР-модели (1) относительно некоторой «эталонной» модели; в частности, при $\hat{A} = 0$ задачам (a), (b) отвечает выбор реализации (2) с минимальной l_2-нормой для SAS^{-1} [12]. С другой стороны, (d) отвечает вычислению начального приближения в схеме Ньютона–Канторовича [13, с. 669] при решении характеристического уравнения задачи (c), т.е. когда SAS^{-1} «SO-подгоняется» к эталонной матрице $\hat{A}$ позиционных сил, не входящей в орбиту $[D, A, B, C]_{\mathrm{SO}}$. Заметим, что в этих вопросах можно применять другие альтернативные подходы [14, с. 351].

3. Моделирование оптимального базиса конфигурационного пространства

При GL-SO-юстировке матрицы A системы реализации (1) знание геометрии пространства $\mathfrak{R}^{\mathrm{GL\text{-}SO}}(\mathbb{R})$ тесно связано с геометрией дифференциальных уравнений второго порядка [15, с. 57]. Поэтому ниже уточним некоторые орбитальные конструкции действия подобия $\rho_{\mathrm{GL/SO}}$. Результаты этого раздела не претерпят качественных изменений при смене l_2-нормы в $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ на любую матричную норму; полезные сопутствующие понятия см. в [11], а также § 30 из [15].

Везде далее $\mathrm{Pr}_A : \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – оператор проектирования на второе координатное подпространство пространства $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$. Очевидно, что для всякой матрицы $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ будет $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}}) = \eta_{\mathrm{GL}}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A, \hat{A}) + \hat{A}$.

В данном контексте $\eta_{\mathrm{GL}}(\cdot,\cdot,\hat{A}) + \hat{A}\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ на пространстве $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, при этом $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ – гладкое (без края) подмногообразие в $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ размерности $n^2 - k$, где k – размерность стабилизатора матрицы A или, что эквивалентно, k – размерность ядра кольцевого коммутатора $S \mapsto (SA - AS)\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Согласно следствия теоремы В.1.7 [11, с. 12] имеем (аналог теоремы Лагранжа):

$$\mathrm{Card}\,\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}}) = (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_A),$$

где $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_A$ – централизатор матрицы A, при этом $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_A$ – замкнутая подгруппа без кручения в объемлющей группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (теорема 2.6.3 [11, с. 117]).

Теорема 1. i) *Для дефектной матрицы* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *многообразие* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ *не замкнуто в пространстве* $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$;

ii) *для не скалярной* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *многообразие* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ *не ограничено*.

Если многообразие $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ не замкнуто (для реализации (1) с дефектной A), то для $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$, как предельной точкой для $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$, малое неустранимое «шевеление» ее элементов может привести к $\hat{A} \in \mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$. Однако заметим, что для задач [4, 5] конечномерных аппроксимаций нормально-гиперболических систем [3] (орбита $[D,A,B,C]_{\mathrm{GL}}$ такой модели содержит (D',A',B',C'), у которой D', A' – симметричные матрицы), достаточно следующего утверждения.

Теорема 2. i) *Многообразие* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ *замкнуто в* $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, *коль скоро матрица* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *диагонализируема в пространстве* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$;

ii) *для каждой орбиты* $[D,A,B,C]_{\mathrm{SO}} \in \mathfrak{R}^{\mathrm{SO}}(\mathbb{R})$ *проекция* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{SO}}([D,A,B,C]_{\mathrm{SO}})$ – *компакт, являющийся образом канторова множества при некотором непрерывном отображении*.

Следствие 1. *При юстировке матриц*

$$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \ \hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$$

существуют такие трансформирующие матрицы $S^{**}, S^{***} \in \mathrm{SO}_n$, *что верны*

$$\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S^{***}, A, \hat{A})\right\| = \sup\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S, A, \hat{A})\right\| : S \in \mathrm{SO}_n\},$$

$$\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S^{**}, A, \hat{A})\right\| = \inf\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S, A, \hat{A})\right\| : S \in \mathrm{SO}_n\}.$$

Для недефектной матрицы A *найдется* $S^* \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, *для которой будет*

$$\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S^*, A, \hat{A})\right\| = \inf\{\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S, A, \hat{A})\right\| : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}.$$

Теорема 3. *Если порядок* n *конфигурационного пространства системы* (1) *нечетный, то многообразие* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ *линейно связное*.

4. Характеристическое уравнение SO-юстировки

Следствие 1 решает вопрос существования матрицы S^{**} глобального минимума нормы SO-юстировки матриц A, $\hat{A}$, при этом задачу построения S^{**} можно проводить с опорой на теорию Морса [16, с. 265]. Ниже покажем, как данная теория, связывая геометрическое строение компактного линейно связного многообразия SO_n со свойствами стационарных точек функционала

$$S \mapsto \left\| \eta_{\mathrm{SO}}(S, A, \hat{A}) \right\| = \| SAS^{-1} - \hat{A} \| = \| SAS^{\mathrm{T}} - \hat{A} \|,\ S \in \mathrm{SO}_n,$$

аналитически выражает эту связь в виде матричного алгебраического уравнения относительно матрицы $S^{**} \in \mathrm{SO}_n$, определяя необходимые условия для процесса SO-юстировки:

$$\left\| \eta_{\mathrm{SO}}(S^{**}, A, \hat{A}) \right\| = \inf \left\{ \left\| \eta_{\mathrm{SO}}(S, A, \hat{A}) \right\| : S \in \mathrm{SO}_n \right\}.$$

Введем в рассмотрение $(A, \hat{A})$-параметризированный функционал $\omega : \mathrm{SO}_n \to \mathbb{R}$ вида $\omega(S) := \mathrm{tr}\,((SAS^{\mathrm{T}} - \hat{A})^{\mathrm{T}} (SAS^{\mathrm{T}} - \hat{A}))$.

Ясно, что стационарные точки функционалов $\left\| \eta_{\mathrm{SO}}(\cdot, A, \hat{A}) \right\|$ и $\omega(\cdot)$ совпадают, причем это те точки $S \in \mathrm{SO}_n$, для которых проекция от $\mathrm{grad}\,\omega(S)$ на касательное пространство $T_S\mathrm{SO}_n$ образует нулевой вектор. Согласно лемме 19.3 [16, с. 279] это условие имеет компактный вид $\mathrm{grad}\,\omega(S) - S\,\mathrm{grad}\,\omega(S)^{\mathrm{T}} S = 0;$
данное уравнение назовем *характеристическим уравнением* SO-юстировки; таким образом, построение матричного уравнения для S^{**} свелось к вычислению вектора $\mathrm{grad}\,\omega(S) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathrm{SO}_n$.

Вводя в пространстве $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ скалярное произведение $\langle H, E \rangle = \mathrm{tr}\,(H^{\mathrm{T}} E) = \mathrm{tr}\,(HE^{\mathrm{T}})$, легко установить, что $\mathrm{grad}\,\mathrm{tr}\,(X^{\mathrm{T}} X) = 2X$. Далее, пусть $S \in \mathrm{SO}_n$ и $D(S) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ – матрица, для которой при всех $h \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ имеет место $hAS^{\mathrm{T}} = D(S)h^{\mathrm{T}}$. Тогда для обговоренных условий будет

$$\begin{aligned}
&\| (S+h)A(S+h)^{\mathrm{T}} \|^2 - \| SAS^{\mathrm{T}} \|^2 = \mathrm{tr}\,(((S+h)A(S+h)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} ((S+h)A(S+h)^{\mathrm{T}})) - \| SAS^{\mathrm{T}} \|^2 = \\
&= \mathrm{tr}\,((S(AS^{\mathrm{T}} + Ah^{\mathrm{T}}) + h(AS^{\mathrm{T}} + Ah^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}} (S(AS^{\mathrm{T}} + Ah^{\mathrm{T}}) + h(AS^{\mathrm{T}} + Ah^{\mathrm{T}}))) - \| SAS^{\mathrm{T}} \|^2 = \\
&= \mathrm{tr}\,((SAS^{\mathrm{T}} + SAh^{\mathrm{T}} + hAS^{\mathrm{T}} + hAh^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (SAS^{\mathrm{T}} + SAh^{\mathrm{T}} + hAS^{\mathrm{T}} + hAh^{\mathrm{T}})) - \| SAS^{\mathrm{T}} \|^2 = \\
&= 2\mathrm{tr}\,((SAS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (SAh^{\mathrm{T}})) + 2\mathrm{tr}\,((SAS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (hAS^{\mathrm{T}})) + 2\mathrm{tr}\,((SAS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (hAh^{\mathrm{T}})) + \\
&+ 2\mathrm{tr}\,((SAh^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (hAS^{\mathrm{T}})) + 2\mathrm{tr}\,((SAh^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (hAh^{\mathrm{T}})) + \| SAh^{\mathrm{T}} \|^2 + \| hAS^{\mathrm{T}} \|^2 + \| hAh^{\mathrm{T}} \|^2.
\end{aligned}$$

Величина $2\left(\langle SA^{\mathrm{T}} A, h \rangle + \langle SA^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} D(S), h \rangle \right)$ представляет собой главную линейную (по h) часть последнего выражения, следовательно, сильная и слабая производные от SAS^{T} равны $2\,(SA^{\mathrm{T}} A + SA^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} D(S))$,
откуда (с учетом дифференцирования сложной функции и $\mathrm{grad}\,\mathrm{tr}\,(X^{\mathrm{T}} X) = 2X$) приходим к $\mathrm{grad}\,\omega(S) = 4\,(SAS^{\mathrm{T}} - \hat{A})(SA^{\mathrm{T}} A + SA^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} D(S))$.

Проведенные построения позволяют переписать уравнение (6) в развернутом виде

$$(SAS^{\mathrm{T}} - \hat{A})(SA^{\mathrm{T}} A + SA^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} D(S)) - S(SA^{\mathrm{T}} A + SA^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} D(S))^{\mathrm{T}} (SAS^{\mathrm{T}} - \hat{A})^{\mathrm{T}} S = 0;$$

данное уравнение можно решать методом Ньютона–Канторовича [13, с. 670].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №19-01-00301 и №19-08-00746).

Список литературы

1. Rutkovsky V.Yu., Suchanov V.M., Glumov V.M. On control theory of large space structures assembled in orbit // Space Technology. Oxford: Lister Sci. Publ., 2010. P. 35-46.
2. Банщиков А.В. Исследование влияния управляющих сил на устойчивость спутника с гравитационным стабилизатором средствами компьютерной алгебры // Проблемы управления и информатики. 2018. № 4. С. 139-149.
3. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана–Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 6. С. 137-157.
4. Дружинин Э.И. Построение структурно устойчивых моделей динамики больших космических конструкций по данным летных испытаний // Доклады РАН. 2017. Т. 479, № 3. С. 285-288.
5. Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Vetrov A.A., Voronov V.A. A posteriori simulation of dynamic model of the elastic element of satellite-gyrostat // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 101, No. 9. P. 2079-2094.
6. Коровин С.К., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Нелинейные отображения вход–выход и их минимальные реализации // Доклады РАН. 2010. Т. 434, № 5. С. 604-608.
7. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход–выход» в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 524-537.
8. Rusanov V.A., Daneev R.A., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. Differential realization of second-order bilinear system: a functional-geometric approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2018. Vol. 19, No. 3. P. 303-321.
9. Rusanov V.A., Lakeev A.V., Linke Yu.E., Voronov V.A. On realization of dynamic systems: Assessment of fiducial accuracy in the process of adjustment of the realization matrix // Far East Journal of Dynamical Systems. 2014. Vol. 25, No. 1. P. 23-35.
10. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980. 440 с.
11. Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990. 320 с.
12. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V., Mironov A.S. Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2013. Vol. 11, No. 1. P. 1-40.
13. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
14. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969. 476 с.
15. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений М.: МЦНМО, 2012. 384 с.
16. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2014. 360 с.