УДК 62-501.72:629.73

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОЛНОГО ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ МОДАЛЬНО-ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЖЕСТКОГО СПУТНИКА

Ю.И. Нехороший
АНО ВО «Гуманитарный институт»
Россия, 129626, Москва, 1-я Мытищинская ул., 23
E-mail: yuri.nekhoroshy@gmail.com

В.Ю. Рутковский
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: rutkov@ipu.ru

Ключевые слова: нежесткий спутник, идентификация параметров, система нелинейных алгебраических уравнений, модально-физическая модель, спектральная задача, пучок матриц.

Аннотация: Рассматривается задача идентификации параметров динамической модели плоского углового движения нежесткого спутника по измерениям угла и угловой скорости, которая состоит в решении системы нелинейных алгебраических уравнений. Предложен алгоритм идентификации параметров, основанный на переходе к решению эквивалентной задачи – спектральной задачи для системы пучков матриц.

1. Введение

В последние годы все большее развитие получают разнообразные космические системы, предназначенные для народного хозяйства. В подобных системах космический аппарат (КА) является либо отправителем сообщения, либо техническим средством канала связи, вариация параметров движения которого представляют собой источник помех. Актуальность проблемы обусловлена также тем, что постоянно возрастают требования к пространственному размещению аппаратуры наблюдения и к точности положения элементов радиотехнических систем КА относительно базовых осей координат. Так требуемая точность удержания современных геостационарных спутников по долготе и широте составляет ±3 угл. мин., точность ориентации геостационарных спутников и спутников наблюдения составляет ±0.1 град., точность стабилизации спутников наблюдения ≤±0.001 град/с.

При этом принципиально новым фактором в обеспечении требуемых параметров движения, который проявил себя особенно остро в последние годы, является фактор упругости конструкции КА.

В данной работе рассматривается один из подходов к решению задачи идентификации параметров математической модели нежесткого КА, по результатам орбитальных измерений.

Идентификация параметров математической модели динамического объекта в ряде случаев требует решения системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ). Например, определение типов материалов и количества каждого из них в некоторой выборке радиоактивных материалов по измерениям веса выборки в определенные моменты времени, определение собственных частот и коэффициентов возбудимости модально-физической модели плоского углового движения деформируемого космического аппарата по измерениям угла и угловой скорости в заданные моменты времени [1,2].

Нашими исследованиями установлено, что классические методы прямого решения СНАУ, такие как метод Ньютона и его модификации, реализованные в многочисленных пакетах программ, малоэффективны или не работают совсем при решении такого класса задач. По нашему мнению, представляется наиболее перспективной стратегия поиска решения СНАУ путем решения эквивалентной математической задачи, имеющей решение, совпадающее с решением исходной СНАУ.

Алгоритм идентификации базируется на ранее предложенном подходе, позволяющем решение СНАУ сводить к решению спектральной задачи для системы линейных пучков матриц [3].

2. Постановка задачи

Модально-физическая модель (МФМ) динамики плоского углового движения упругого спутника, который в рассматриваемом случае состоит из основного абсолютно жесткого тела и упруго присоединенных к нему одного или более дополнительных тел [4], имеет вид:

$$\ddot{\bar{\phi}} = m_{\phi}, \tag{1}$$

$$\ddot{\tilde{\phi}}_i + \omega_i^2 \tilde{\phi}_i = k_i m_{\phi},\ i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\phi = \bar{\phi} + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\phi}_i, \tag{3}$$

где ϕ – суммарное угловое смещение основного тела; $\bar{\phi}$ – угловое смещение, обусловленное движением спутника как жесткого тела; $\tilde{\phi}_i$ – дополнительное угловое смещение основного тела, вызванное i-й модой собственных колебаний; ω_i – собственная частота i-й упругой моды; k_i – коэффициент возбудимости i-й моды; $m_{\phi} = M_{\phi} / J$, M_{ϕ} – управляющий момент, J – момент инерции спутника; N – количество учитываемых гибких мод. Величина ϕ – измеряемая, а ее составляющие $\bar{\phi}$, $\tilde{\phi}_i$, которые определяются уравнениями (1), (2), как правило, являются не измеряемыми, но должны быть наблюдаемыми. Без ограничения общности в данной работе рассматривается случай совмещенного управления, т.е. такой случай, когда датчики системы ориентации и исполнительные органы расположены в пределах основного тела спутника.

Математически задача идентификации параметров динамической модели (1)-(3) может быть сведена к решению следующей СНАУ [1]:

(4) $$\frac{m_\phi t_p^2}{2}+\dot{\bar{\phi}}_0 t_p+\sum_{i=1}^{N}\left[\left(1-\cos\omega_i t_p\right)\left(\frac{m_\phi k_i}{\omega_i^2}-\tilde{\phi}_{0i}\right)+\frac{\dot{\tilde{\phi}}_{0i}}{\omega_i}\sin\omega_i t_p\right]-$$
$$-\phi_p+\phi_0=0,\ p=\overline{1,L},$$

(5) $$m_\phi t_p+\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{m_\phi k_i}{\omega_i}-\tilde{\phi}_{0i}\omega_i\right)\sin\omega_i t_p-\dot{\tilde{\phi}}_{0i}\left(1-\cos\omega_i t_p\right)\right]-$$
$$-\dot{\phi}_p+\dot{\phi}_0=0,\ p=\overline{1,L}.$$

Здесь L – число измерений угла и угловой скорости; $\bar{\phi}_0,\tilde{\phi}_{01},...,\tilde{\phi}_{0N}$, $\dot{\bar{\phi}}_0,\dot{\tilde{\phi}}_{01},...,\dot{\tilde{\phi}}_{0N}$ – вектор состояния спутника в момент времени t_0; M_ϕ – управляющий момент ступенчатой формы, приложенный в момент времени t_0; $\phi_p,\dot{\phi}_p$ – измерения угла и угловой скорости в момент времени t_p, $\phi_p=\bar{\phi}_p+\sum_{i=1}^{N}\tilde{\phi}_{pi}$, $\dot{\phi}_p=\dot{\bar{\phi}}_p+\sum_{i=1}^{N}\dot{\tilde{\phi}}_{\mathrm{pi}}$; ω_i,k_i – искомые параметры.

Далее рассматривается модально-физическая модель, учитывающая одну гибкую моду.

Преобразуем уравнения системы (4), (5) в полиномиальную форму. Для этого разложим в ряд Тейлора левые части уравнений (4), (5) по собственной частоте первой моды в окрестности начальной оценки и учитывая члены в разложении в степени не выше q, получаем систему полиномиальных уравнений [2]:

(6) $$\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{1}a_{ij}^{(v)}\omega_1^i k_1^j=0,\ v=\overline{1,M}.$$

Предполагается, что оценка собственной частоты к моменту начала процедуры идентификации известна с точностью 20%.

В данной работе рассматривается алгоритм идентификации собственной частоты и коэффициента возбудимости, при известном векторе состояния в начальный момент времени, на основе решения спектральной задачи для системы линейных пучков матриц.

3. Алгоритм идентификации

Введем обозначения:

$$X_r^{(\omega)}=\left(\omega_1^r k_1,\omega_1^r\right)^T,$$
(7) $$X_\omega=(X_q^{(\omega)},X_{q-1}^{(\omega)},\ldots,X_1^{(\omega)},X_0^{(\omega)})^T.$$

Системе (6) сопоставим матрицу

(8) $$A_\omega = \begin{bmatrix} a_{q1}^{(1)} & a_{q0}^{(1)} & a_{q-1,1}^{(1)} & a_{q-1,0}^{(1)} & \cdots & a_{01}^{(1)} & a_{00}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1}^{(2M)} & a_{q0}^{(2M)} & a_{q-1,1}^{(2M)} & a_{q-1,0}^{(2M)} & \cdots & a_{01}^{(2M)} & a_{00}^{(2M)} \end{bmatrix},$$

в которой коэффициенты, не входящие в уравнения системы (6), заменены нулями.

Тогда систему (6) в выбранных обозначениях можно записать в эквивалентном виде

(9) $$A_\omega X_\omega = 0,$$

$X_\omega \in R_T, R_T$ – пространство векторов T=2(q+1) измерений, $\dim A_\omega = 2M \times T$.

Множество решений системы (9) образуют векторное пространство, называемое нуль-пространством матрицы A_ω [5]. Пусть столбцы матрицы B_0 являются базисом нуль-пространства матрицы A_ω, $\dim B_0 = T \times d, d = T - c$, где с – ранг A_ω.

Пусть ω_1, k_1 есть решение системы (6). Тогда справедливо равенство

(10) $$B_0 Z = X_\omega,$$

т.е. любой вектор X_ω, удовлетворяющий системе (6), принадлежит B_0.

Введем обозначения

$$B_+ = \begin{bmatrix} B_{0q} \\ B_{0,q-1} \\ \vdots \\ B_{01} \end{bmatrix}, B_- = \begin{bmatrix} B_{0,q-1} \\ B_{0,q-2} \\ \vdots \\ B_{00} \end{bmatrix},$$

$\dim B_+ = \dim B_- = 2q \times d$. Здесь

$$B_{0q} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, B_{0,q-1} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \ldots, B_{00} = \begin{bmatrix} b_{T-1} \\ b_T \end{bmatrix},$$

где b_i – i-я строка матрицы B_0.

Тогда учитывая строение X_ω, уравнение (10) можно записать в виде

(11) $$\left(B_+ - \omega_1 B_-\right) Z = 0.$$

Введем следующие обозначения, аналогично выражениям (7), (8)

$$X_1^{(k)} = \left(k_1\omega_1^q, k_1\omega_1^{q-1}, \ldots k_1\omega_1, k_1\right)^T,$$

$$X_0^{(k)} = \left(\omega_1^q, \omega_1^{q-1}, \ldots \omega_1, 1\right)^T,$$

$$X_k = \left(X_1^{(k)}, X_0^{(k)}\right)^T,$$

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{q1}^{(1)} & a_{q-1,1}^{(1)} & \cdots & a_{01}^{(1)} & a_{q0}^{(1)} & a_{q-1,0}^{(1)} & \cdots & a_{00}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1}^{(2M)} & a_{q-1,1}^{(2M)} & \cdots & a_{01}^{(2M)} & a_{q0}^{(2M)} & a_{q-1,0}^{(2M)} & \cdots & a_{00}^{(2M)} \end{bmatrix}.$$

Матрица A_k отличается от матрицы A_ω порядком следования столбцов. Следовательно, матрица C_0, столбцы которой образуют базис нуль-пространства A_k, отличается от B_0 лишь порядком следования строк. Тогда аналогично выражениям (9), (10) имеем

$$A_k X_k = 0, C_0 Z = X_k.$$

Обозначим

$$C_+ = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{q+1} \end{bmatrix}, C_- = \begin{bmatrix} c_{T-q} \\ c_{T-q+1} \\ \vdots \\ c_T \end{bmatrix},$$

$\dim C_+ = \dim C_- = (q+1) \times d$. Здесь c_i – i-я строка C_0 .

Учитывая строение X_k , уравнение $C_0 Z = X_k$ можно записать в виде

(12) $\left(C_+ - k_1 C_-\right) Z = 0$.

В статье [3] доказано, что решение системы (6) эквивалентно решению спектральной задачи для системы пучков матриц (11), (12). Таким образом, алгоритм идентификации ω_1, k_1 включает процедуры определения базиса нуль-пространства матрицы и пар собственных значений и векторов пучка матриц. Для построения базиса нуль-пространства матрицы можно воспользоваться алгоритмами на основе QR факторизации [6] или SVD декомпозиции [7]. Решение спектральной задачи для линейного пучка матриц может быть найдено с помощью QZ-алгоритма [8].

Список литературы

1. Нехороший Ю.И., Рутковский В.Ю., Суханов В.М. Идентификация параметров модально-физической модели деформируемого космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 19-25.
2. Нехороший Ю.И. Идентификация параметров модели нежесткого спутника на основе решения спектральной задачи для системы пучков матриц // Автоматика и телемеханика. 1997. № 1. С. 181-186.
3. Кублановская В.Н. О связи спектральной задачи для линейных пучков матриц с некоторыми задачами алгебры // Зап. науч. семинаров Ленинградского отделения Математического ин-та АН СССР. 1978. Т. 80. С. 98-116.
4. Суханов В.М., Рутковский В.Ю. Уравнения движения и анализ динамики конструкций деформируемых космических аппаратов с разветвленной структурой / Препринт. М.: Институт проблем управления, 1986.
5. Уонэм У.М. Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. М.: Наука, 1980.
6. 386-MATLAB User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1990.
7. MATLAB Release Notes Version 4.2. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1994.
8. Moler C.B., Stewart G.W., An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10, No. 2. P. 241-256.