

УДК 629.05:517.93;531.39/.768/.77

# ИЗОТРОПНЫЙ УПРУГИЙ ПОДВЕС ИНЕРТНОЙ МАССЫ ДЛЯ БИНС МАЯТНИКОВОГО ТИПА

**Ю.К. Жбанов**

*ИПМех РАН*

119526, Москва, пр-т. Вернадского, 101, корп. 1

E-mail: [yura.zhbanov@gmail.com](mailto:yura.zhbanov@gmail.com)

**Е.А. Привалов**

*ИПМех РАН*

119526, Москва, пр-т. Вернадского, 101, корп. 1

Академиком В.Ф. Журавлевым предложена новая схема бесплатформенной инерциальной навигационной системы, названная им БИНС маятникового типа [1, 2]. В этой схеме датчиком полной инерциальной информации о движущемся объекте является траектория материальной точки в центральном поле сил. Если траектории придана форма эллипса, то на подвижном объекте центр эллипса будет смещен относительно центра поля на величину, пропорциональную ускорению объекта, а главные оси эллипса сохранят ориентацию в инерциальном пространстве. Таким образом, наблюдение траектории точки в системе координат, связанной с объектом, позволяет определить ускорение поступательного перемещения и ориентацию объекта.

Обеспечить подвес инертной массы в центральном поле сил можно механическим пружинным подвесом, обеспечивающим линейную зависимость силы от смещения инертной массы. На траекторию инертной массы в центре подвеса могут влиять инертные свойства элементов механического подвеса. Для анализа этого влияния нужно найти выражение кинетической энергии элементов подвеса как функцию скорости его центра.

В выполненной работе исследуется динамика стержневого упругого подвеса следующей конструкции. На каждой грани воображаемого куба с вершинами, закрепленными на объекте, по диагоналям размещены два тонких прямолинейных, цилиндрических стержня с закрепленными в вершинах куба концами и скрепленных между собой в центре грани.

Центры каждой пары стержней на противоположных гранях куба соединены стержнями с жестко закрепленными в центрах граней концами и жестко скрепленными между собой в центре куба. Центр подвеса – точка пересечения трех центральных стержней может смещаться от центра куба за счет деформации стержней конструкции.

Для определения форм, которые стержни принимают при малом смещении центра подвеса, используются методы теории сопротивления материалов. Рассмотрим стержень, один из концов которого заземлен, а к другому приложена сила  $F$ , перпендикулярная стержню и момент  $M$ , перпендикулярный и стержню и силе. Координату точки недеформированного стержня обозначим  $S$ , она отсчитывается от точки заземления и меняется от 0 до  $L$ . Смещение точки стержня при его изгибе, перпендикулярное продольной оси стержня, обозначим  $D$ . Считаем, что деформация стержня мала по сравнению с его длиной, и его кривизна равна  $D''$  – второй производной  $D$  по  $S$ .

Для точки стержня в сечении, находящемся на расстоянии  $S$  от точки защемления стержня, выполняется соотношение [3]

$$D'' = \frac{1}{\mu} M + \frac{1}{\mu} (L - S) F.$$

Здесь  $\mu = E \cdot I$  – коэффициент жесткости стержня на изгиб,  $E$  – модуль упругости,  $I$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси.

Используя безразмерные величины

$$d = \frac{D}{L}, s = \frac{S}{L}, m = \frac{ML}{\mu}, f = \frac{FL^2}{\mu},$$

уравнение приведем к виду

$$d'' = m + (1 - s)f.$$

В точке защемления стержня выполнены условия

$$d(0) = 0, d'(0) = 0.$$

Проинтегрируем уравнение изгиба стержня с учетом условий защемления. Получим формулу для угла поворота касательной к стержню

$$(1) \quad d' = ms + \left(s - \frac{s^2}{2}\right)f.$$

Повторным интегрированием уравнения получим выражение для смещения точки стержня от недеформированного состояния

$$(2) \quad d = m \frac{s^2}{2} + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6}\right)f.$$

При  $s = 1$  имеем

$$(3) \quad d'(1) = m + \frac{1}{2}f, d(1) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{3}f.$$

С объектом, на котором расположен подвес, свяжем декартову систему координат  $Oxuz$ , начало  $O$  которой помещено в центр находящегося в недеформированном состоянии подвеса, а оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  направлены вдоль центральных стержней. Единичные векторы осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  обозначим соответственно  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ .

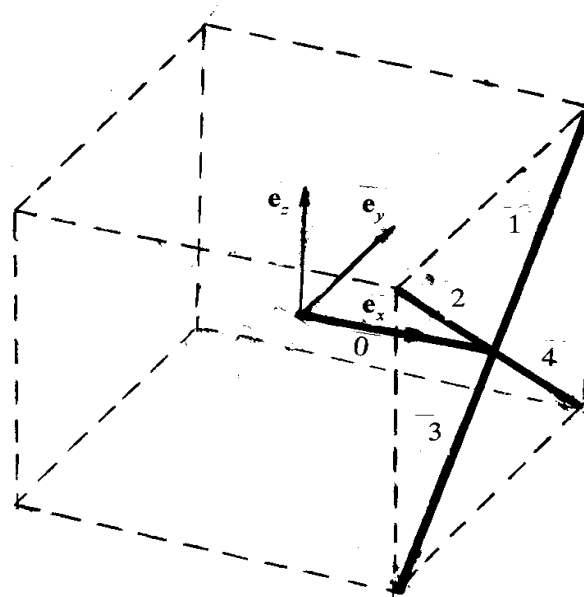


Рис. 1.

В рассматриваемой конструкции подвеса выделим состоящей из пяти стержней фрагмент (Фиг. 1), центральный стержень которого в недеформированном состоянии, направлен вдоль оси  $Ox$ . Центральному стержню фрагмента дадим номер 0, четырем диагональным стержням – номера 1 – 4. В Таблице 1 записаны векторы  $\mathbf{r}_{ix}$

( $i = 0 - 4$ ), задающие положение точек стержней фрагмента в недеформированном состоянии.

Таблица 1.

$\mathbf{r}_{0x} = s\mathbf{e}_x$
$\mathbf{r}_{1x} = \mathbf{e}_x + (1 - \frac{s}{\sqrt{2}})(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$
$\mathbf{r}_{2x} = \mathbf{e}_x + (1 - \frac{s}{\sqrt{2}})(-\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$
$\mathbf{r}_{3x} = \mathbf{e}_x + (1 - \frac{s}{\sqrt{2}})(-\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z)$
$\mathbf{r}_{4x} = \mathbf{e}_x + (1 - \frac{s}{\sqrt{2}})(\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z)$

Параметр  $s$ , определяющий положение рассматриваемой точки стержня, для центральных стержней сборки ( $0 \leq s \leq 1$ ) отсчитывается от центра подвеса, для стержней на боковых гранях куба ( $0 \leq s \leq l$ ) при  $l = \sqrt{2}$  – от точки их крепления к основанию.

При определении форм диагональных стержней в формулах (1 - 3) вместо единицы используется величина  $l = \sqrt{2}$ .

$$d'(l) = ml + \frac{1}{2}f l^2$$

$$d(l) = ml^2 + \frac{1}{3}f l^3$$

Конструкция подвеса состоит из трех пар таких фрагментов с ориентацией центральных стержней по направлениям  $\pm \mathbf{e}_x$ ,  $\pm \mathbf{e}_y$ ,  $\pm \mathbf{e}_z$ . Центральные стержни каждой пары фактически составляют единый стержень двойной длины, но в расчетах удобно каждую половину считать отдельным стержнем единичной длины. Положение точек фрагмента, у которого центральный стержень направлен против оси  $Ox$ , задается формулами Таблицы 1, в которых произведена смена знака всех трех единичных векторов  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . Координаты точек фрагментов подвеса, у которых центральные стержни направлены по осям  $Oy$  и  $Oz$ , получаются в результате циклической перестановки векторов  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . Для расчета деформаций всего подвеса достаточно определить деформации одного из фрагментов.

Деформация стержней на боковой грани куба при смещении центра подвеса, ортогональном грани куба, удовлетворяет условию  $d'(l) = 0$ . В этом случае отклонение диагонального стержня от недеформированного состояния определяется формулой

$$d(s) = d(l) \left[ 3 \left( \frac{s}{l} \right)^2 - 2 \left( \frac{s}{l} \right)^3 \right], \quad d(l) = \frac{l^3}{12} f.$$

Рассмотрим деформацию стержней, лежащих на одной из диагоналей боковой грани куба, при смещении центра подвеса, параллельном этой диагонали. Эта деформация в точке их соединения с центральным стержнем сводится к повороту касательной к стержням на угол, пропорциональный смещению центра подвеса, удовлетворяет условию  $d(l) = 0$  и имеет вид

$$(4) \quad d(s) = d'(l)l \left[ - \left( \frac{s}{l} \right)^2 + \left( \frac{s}{l} \right)^3 \right].$$

Здесь  $d'(l) = \frac{1}{4}ml$ .

Формулой (4) определяется изгибная жесткость соединения центрального стержня с одним стержнем боковой грани.

Рассмотренное смещение центра подвеса приводит к изгибу двух стержней и к кручению двух других стержней на боковой грани куба. Жесткость цилиндрического

стержня на кручение в два раза больше жесткости на изгиб. Суммарная жесткость стержней на боковой грани куба на изгиб и на кручение при любом смещении центра подвеса, параллельном грани, оказывается равной  $\mu = \frac{24}{l}$ .

Деформация центрального стержня при смещении центра подвеса ортогонально стержню определяется условием  $m = -\mu d'(1)$  и имеет вид

$$d(s) = d(1) \left[ \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^3 - \frac{3\mu}{2(4+\mu)}(s^2 - s^3) \right]$$

В Таблице 2 приведены перемещения  $\Delta \mathbf{r}_{ix}$  ( $i = 0 - 4$ ) точек фрагмента подвеса при смещении центра подвеса в точку  $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ .

Таблица 2.

$\Delta \mathbf{r}_{0x} = x\mathbf{e}_x + (1-a)(y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = \mathbf{R} - a(y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$
$\Delta \mathbf{r}_{1x} = \mathbf{e}_x [bx + c(y+z)]$
$\Delta \mathbf{r}_{2x} = \mathbf{e}_x [bx + c(-y+z)]$
$\Delta \mathbf{r}_{3x} = \mathbf{e}_x [bx + c(-y-z)]$
$\Delta \mathbf{r}_{4x} = \mathbf{e}_x [bx + c(y-z)]$

Функции  $a, b, c$  имеют вид

$$a(s) = \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^3 + \frac{9}{l+6}(s^2 - s^3), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$b(s) = 3 \left( \frac{s}{l} \right)^2 - 2 \left( \frac{s}{l} \right)^3, \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$c(s) = \frac{3l^2}{2(l+12)} \left[ - \left( \frac{s}{l} \right)^2 + \left( \frac{s}{l} \right)^3 \right], \quad 0 \leq s \leq l$$

Смещения точек фрагмента подвеса, у которого центральный стержень направлен против оси  $Ox$ , совпадают с данными Таблицы 2. Смещения точек других фрагментов определяются формулами, получающимися в результате циклической перестановки в формулах Таблицы 2 переменных  $x, y, z$  и векторов  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ .

Скорость точки подвеса на совершающем поворот относительно инерциальной системы координат основании определяется формулой

$$\mathbf{V} = \Delta \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{r}.$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость основания.

Выражение для квадрата скорости представим в виде

$$\mathbf{V}^2 = \Delta \dot{\mathbf{r}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\Delta \mathbf{r} \times \Delta \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\omega}^2 \cdot (\Delta \mathbf{r})^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \Delta \mathbf{r})^2$$

Для подсчета кинетической энергии  $T$  стержневого подвеса следует выражение для квадрата скорости точки стержня проинтегрировать по  $s$  для каждого стержня, принимая линейную плотность стержня за единичную, т.е. считая дифференциал массы  $dm = ds$ . Затем результаты интегрирования просуммировать по всем стержням. Получим выражение

$T =$

$$= \frac{1}{2} \int \mathbf{V}^2 ds = A \dot{\mathbf{R}}^2 + B 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + C \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{R}^2 - D (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R})^2 + E (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2 + z^2 \omega_z^2),$$

где

$$A = \int_0^1 [1 + 2(1-a)^2] ds + \int_0^l [4b^2 + 8c^2] ds, \quad B = \int_0^1 (1-a)^2 (3-a^2) ds,$$

$$C = A + \int_0^l 4c^2 ds, \quad D = \int_0^1 (1-a)(3-a) ds, \quad E = \int_0^1 a^2 ds + 4 \int_0^l (b^2 - c^2) ds.$$

Подстановка числовых значений коэффициентов в формулу для кинетической энергии дает результат

$$(5) \quad T = 1.82[\dot{\mathbf{R}}^2 + 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{R}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R})^2] - \\ - 1.32\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + 0.01\boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{R}^2 + 0.33(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R})^2 + \\ + 2.41(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2 + z^2\omega_z^2)$$

Первое слагаемое в (5) соответствует кинетической энергии материальной точки в центральном поле сил. При размещении в центре подвеса инертной массы ее безразмерное значение добавляется к коэффициенту перед квадратной скобкой.

Динамика инертной массы, помещенной в механический упругий подвес, совпадает с динамикой материальной точки в центральном поле сил при условии компенсации сил, соответствующих слагаемым во второй и третьей строках формулы (5).

## Список литературы

1. Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная система минимальной размерности // Изв. РАН. МТТ 2005. № 5. С. 5-10.
2. Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная навигационная система маятникового типа (БИНС МТ) // Изв. РАН. МТТ.. 2014. № 1. С. 6 -17.
3. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.