УДК 62–501.2

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕЛЕЖКИ-КРАНА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.С. Антипов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: scholess18@mail.ru

С.А. Краснова
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65;
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5
E-mail: skrasnova@list.ru

Ключевые слова: механическая система, пассивность, стабилизация, инвариантность, сигмоидальная функция, наблюдатель состояния пониженного порядка.

Аннотация: Рассматривается нелинейная механическая система, описывающая движение тележки-крана с закрепленным на ней грузом, которая имеет две степени свободы и одно управляющее воздействие. В условиях неполных измерений вектора состояния, неопределенности параметров и действия внешнего возмущения ставится задача стабилизации заданного положения тележки-крана с помощью динамической обратной связи. С учетом свойства пассивности системы предложен закон управления с линейной и сигмоидальной составляющими, обеспечивающий стабилизацию обобщенных координат и инвариантность с заданной точностью по отношению к внешнему возмущению. Для оценивания скорости по измерениям положения тележки используется наблюдатель состояния пониженного порядка с сигмоидальной коррекцией.

1. Введение

Транспортировочные краны широко используются в промышленном производстве и строительстве для перемещения массивных грузов. В данной работе рассматривается одна из задач управления беспилотными транспортными средствами, связанная с синтезом системы управления перемещением грузов в заданный пункт. Объектом управления является тележка-кран, ее математическая модель представлена нелинейной динамической системой с двумя степенями свободы и одним управлением. Классический подход к синтезу нелинейных систем с недостатком управляющих воздействий опирается на линейную теорию: закон управления строится на основе линеаризованной системы [1] и обеспечивает локальную стабилизацию в окрестности линеаризуемого положения. Другой подход основан на свойствах пассивности механических систем, построении для них функций Ляпунова и глобальной стабилизации [2-5]. Стандартным решением является использование пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора, зависящего от положения и скорости [2, 3], и его модификаций. Так в [5] с целью улучшения качества переходных процессов предложен ПД-регулятор с использованием угловой координаты и ее производной. При наличии внешних согласованных возмущений и параметрической неопределенности естественным способом обеспечения инвариантности выступают силовые методы – системы с разрывными управлениями, функционирующие в скользящем режиме [6-9]. Однако эти эвристические алгоритмы непосредственно не применимы к механическим системам, так как управляющие воздействия, в качестве которых выступают обобщенные моменты, действующие на механическую систему, имеют разрывной, высокочастотный характер.

В данной работе рассматривается задача стабилизации заданного положения тележки-крана в условиях неполных измерений и действия параметрических и внешних возмущений. С использованием свойства пассивности механической системы [2-5] разработан комбинированный закон управления в форме обратной связи с линейным и нелинейным (сигмоидальным) слагаемыми. Являясь гладкой допредельной реализацией функции знака [10-12], ограниченная сигмоидальная функция физически реализуема в механических системах с учетом динамики исполнительных устройств. Она позволяет подавить действие согласованных возмущений и избежать излишнего расхода ресурсов управления и перерегулирования в начале переходных процессов.

При построении законов управления механическими системами часто все переменные состояния считаются доступными для измерений. Однако на практике обычно измерению подлежат только обобщенные координаты. Для получения оценок обобщенных скоростей в работе предложен оригинальный принцип построения наблюдателя пониженного порядка с сигмоидальными корректирующими воздействиями.

2. Описание системы. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается тележка-кран с массой M, к которой на невесомом тросе длиной l прикреплен груз с массой m, q_{12} – угол отклонения троса от вертикальной оси (см. рис. 1). Тележка может совершать горизонтальные перемещения q_{11} под действием управляющей силы u.

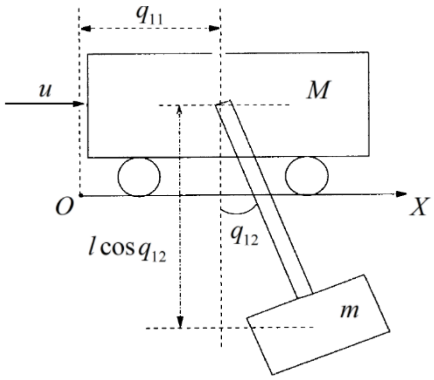

Рис. 1. Схема тележки-крана.

Математическая модель объекта управления имеет следующий вид [2,5]:

$$\begin{aligned} &\dot{q}_1 = q_2, \\ &\dot{q}_2 = f_1(q_1,q_2) + f_2(q_1,q_2)(u+\eta(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $q_1 = \mathrm{col}(q_{11},q_{12}) \in \Re^2$ – вектор обобщенных координат, $q_2 = \mathrm{col}(q_{21},q_{22}) \in \Re^2$ – вектор обобщенных скоростей; $f_1(q_1,q_2) = \mathrm{col}(f_{11},f_{12}) \in \Re^2$, $f_2(q_1,q_2) = \mathrm{col}(f_{21},f_{22}) \in \Re^2$,

$$f_{11} = \frac{1}{M + m\sin^2 q_{12}}\left[-m\sin q_{12}(lq_{22}^2 + g\cos q_{12})\right],$$
$$f_{12} = \frac{1}{l(M + m\sin^2 q_{12})}\left[-\sin q_{12}((M+m)g + ml\cos q_{12}\cdot q_{22}^2)\right];$$
$$f_{21} = \frac{1}{M + m\sin^2 q_{12}},\ f_{22} = \frac{\cos q_{12}}{l(M + m\sin^2 q_{12})};$$

g – ускорение свободного падения; $\eta(t)$ – обобщенная сила, трактуемая как неизвестное, ограниченное возмущение. Предполагается, что:

- $|\eta(t)| \le N, |\dot{\eta}(t)| \le N_1\ \forall t \ge 0,\ N, N_1$ – известные константы;
- параметры l, m, M точно не известны;
- груз рассматривается как точечная масса, жесткость и масса троса не учитываются;
- измеряется только положение тележки $q_{11}(t)$, шумы в измерениях отсутствуют.

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей заданное положение тележки $q_{11d} = \text{const}$ и стабилизацию остальных переменных состояния. В условиях неопределенности эта задача может быть решена с заданной точностью:

(2) $$|e_{11}(t)| \le \delta_{11},\ |q_{21}(t)| \le \delta_{21}\ \forall t > T > 0,\ e_{11} = q_{11} - q_{11d}.$$

3. Синтез динамической обратной связи

Для решения поставленной задачи (2) предлагается комбинированное управление

(3) $$u = -k_1 e_{11} - M_2\sigma(\alpha q_{21}),$$

где $\sigma(\alpha q_{21}) = \dfrac{2}{1 + e^{-\alpha q_{21}}} - 1$ – сигмоидальная функция, $\alpha, M_2 = \text{const} > 0$ (см. Приложение). Линейная часть служит для стабилизации ошибки регулирования e_{11}, скорость сходимости зависит от выбора $k_1 > 0$, а нелинейная (сигмоидальная) – для обеспечения инвариантности по отношению к внешнему возмущению [10-12].

Для выбора параметров закона управления (3) и исследования устойчивости замкнутой системы (1), (3) в качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим [5]

(4) $$V(q_1, q_2) = E(q_1, q_2) + \tfrac{1}{2}k_1 e_{11}^2,\ E(q_1, q_2) = \tfrac{1}{2}q_2^T H(q_1) q_2 + mgl(1 - \cos q_{12}),$$

где $E(q_1, q_2)$ – полная энергия системы с матрицей инерции

$$H(q_1) = \begin{pmatrix} M + m & -ml\cos q_{12} \\ -ml\cos q_{12} & ml^2 \end{pmatrix}.$$

С учетом (1), (3) производная функции (4) имеет вид

$$\dot{V} = q_{21}(u + \eta + k_1 e_{11}) = q_{21}(\eta - M_2\sigma(\alpha q_{21})).$$

Вне окрестности $|q_{21}(t)| \le 3/\alpha$ в силу (П1), (П2) справедливы следующие оценки:

(5) $$\dot{V} \le |q_{21}|(N - 0{,}9M_2) < 0 \Rightarrow M_2 > 1{,}1N.$$

При выборе параметра M_2 в указанном виде (5) за конечное время $t_1 > 0$ в замкнутой системе (1), (3) обеспечивается сходимость переменных $e_{11}(t), q_{21}(t), q_{12}(t), q_{22}(t)$ в некоторые окрестности нуля. Параметр α, который играет роль большого коэффициента, выбирается исходя из заданной точности (2) в силу (П1), (П2) на основе следующих соотношений: $|q_{21}| \le \delta_{21} = 3/\alpha$, $|\eta - M_2\sigma(\alpha q_{21})| \le \beta = 10N_1/(M_2\alpha)$, $|e_{11}| \le \delta_{11} = \beta / k_1 \Rightarrow$

(6) $$\alpha > \max\left\{\frac{3}{\delta_{21}}; \frac{10N_1}{M_2\delta_{11}k_1}\right\}.$$

Для реализации базового закона управления $u(q_{11} - q_{11d}, q_{21})$ требуется получить оценку скорости $q_{21}(t)$ по измерениям положения тележки $q_{11}(t)$. В условиях существенной неопределенности модели объекта управления и действия внешних возмущений эту задачу можно решить только с заданной точностью. Ниже представлен оригинальный метод синтеза наблюдателя состояния пониженного порядка с сигмоидальной коррекцией. Данный наблюдатель строится как реплика подсистемы $\dot{q}_{11} = q_{21}$, где переменная $q_{21}(t)$ трактуется как внешнее ограниченное возмущение с ограниченной производной $|q_{21}(t)| \le \bar{q}_{21}$, $|\dot{q}_{21}(t)| \le \bar{q}_{31}$ $\forall t \ge 0$, и имеет вид $\dot{z}_{11} = \nu$, где $z_{11} \in \Re$ – переменная состояния, $\nu = U\sigma(k\varepsilon)$ – сигмоидальное корректирующее воздействие наблюдателя, $\varepsilon = q_{11} - z_{11} \in \Re$ – ошибка наблюдения. Задача наблюдения сводится к стабилизации систем относительно ошибки наблюдения и ее производной

(7) $$\dot{\varepsilon} = q_{21} - \nu = q_{21} - U\sigma(k\varepsilon), \quad \ddot{\varepsilon} = \dot{q}_{21} - U\sigma'(k\varepsilon)\dot{\varepsilon}$$

с заданной точностью:

(8) $$|\varepsilon(t)| \le \Delta, \; |\dot{\varepsilon}(t)| \le \Delta \;\; \forall t > t^*, \; 0 \le t^* < T.$$

При выполнении (8) из уравнения статики имеем: $|\dot{\varepsilon}(t)| \le \Delta \Rightarrow |q_{21}(t) - \nu(t)| \le \Delta \;\forall t > t^*$. Таким образом, корректирующее воздействие служит искомой оценкой переменной $\nu(t) \approx q_{21}(t) \;\forall t > t^*$, а закон управления (3) реализуется в виде $u = -k_1 e_{11} - M_2\sigma(\alpha\nu)$.

Для выбора параметров $k, U > 0$, обеспечивающих (8), при анализе систем (7) используются свойства сигма-функции (П1), (П2). При $|\varepsilon| > 3/k$ имеем:

$$\varepsilon\dot{\varepsilon} = \varepsilon(q_{21} - U\sigma(k\varepsilon)) \le |\varepsilon|(\bar{q}_{21} - 0{,}9U) < 0 \Rightarrow U > 1{,}1\bar{q}_{21},$$

что обеспечивает $|\varepsilon(t)| \le 3/k$ за конечное время. При $t > t^*$ имеем:

$$\varepsilon\dot{\varepsilon} = \varepsilon(q_{21} - U\sigma(k\varepsilon)) \le |\varepsilon|(\bar{q}_{21} - 0{,}3Uk|\varepsilon|) < 0 \Rightarrow k > 3{,}3\bar{q}_{21}/(U|\varepsilon|);$$

$$\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\dot{q}_{21} - U\sigma'(k\varepsilon)\dot{\varepsilon}) \le |\dot{\varepsilon}|(\bar{q}_{31} - 0{,}1Uk|\dot{\varepsilon}|) < 0 \Rightarrow k > 10\bar{q}_{31}/(U|\dot{\varepsilon}|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k > \max\{3{,}3\bar{q}_{21};\; 10\bar{q}_{31}\}/(U\Delta).$$

4. Заключение

Тележка-кран представляет собой сложную механическую систему с двумя степенями свободы и одним управляющим воздействием. В работе предложен закон управления с линейной и сигмоидальной частью, решающий задачу стабилизации заданного положения в условиях параметрической неопределенности. Класс рассматриваемых систем расширяется за счет систем с внешним ограниченным возмущением, на которое не накладывается требование гладкости, оно может быть кусочно-непрерывным с ограниченными односторонними производными. Для реализации закона управления построен наблюдатель с сигмоидальным корректирующим воздействием. Разработанный подход к решению задачи стабилизации подтверждается результатами моделирования. Использование сигмоидальных функций обеспечивает инвариантность с заданной точностью по отношению к имеющимся неопределенностям.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00846А).

Приложение. Характеристика сигмоидальной функции

Рассмотрим нелинейную гладкую ограниченную сигмоидальную функцию $\sigma(\alpha x) = 2/(1+e^{-\alpha x}) - 1$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$, которая является допредельной реализацией функции знака $y = \mathrm{sign} x$ в следующем смысле: $\sigma(-\alpha x) = -\sigma(\alpha x)$, $\sigma(\alpha x) \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x / 2$, $\sigma(\alpha x) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \mathrm{sign} x$. Первая производная сигмоидальной функции – положительная ограниченная четная функция $\sigma'(\alpha x) = \alpha(1 - \sigma^2(\alpha x))/2$, вторая производная – ограниченная нечетная функция $\sigma''(\alpha x) = -\alpha \sigma'(\alpha x) \sigma(\alpha x)$.

Для сигмоидальной функции и ее первой производной в указанных интервалах справедливы следующие оценки [11]:

$$\begin{gathered} \sigma(\alpha\Delta) < |\sigma(\alpha x)| < 1,\ 0 < \sigma'(\alpha x) < \sigma'(\alpha\Delta)\ \forall\, |x| > \Delta > 0; \\ \sigma(\alpha\Delta)\, |x| / \Delta \le |\sigma(\alpha x)| \le \sigma(\alpha\Delta), \\ 0 < \sigma'(\alpha\Delta) \le \sigma'(\alpha x) \le \sigma'(0) = \alpha / 2\ \forall\, |x| \le \Delta. \end{gathered} \tag{П1}$$

Из (П1) следует, что при $|x| > \Delta$ сигмоидальная функция близка к постоянной функции, а при $|x| \le \Delta$ – к линейной. В качестве границы рекомендуется принять точку $\alpha\Delta = c$, где $\pm c \approx \pm 3$ – абсциссы вершин сигмоидальной функции, в которых ее кривизна достигает максимума, при этом:

$$\sigma(\pm 3) \approx \pm 0{,}9,\ \sigma'(\pm 3) \approx 0{,}1\alpha,\ \alpha\Delta \approx 3. \tag{П2}$$

Список литературы

1. Le Tuan Anh, Gook-Hwan Kim, Min Young Kim, Soon-Geul Lee. Partial Feedback Linearization Control of Overhead Cranes with Varying Cable Lengths // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2012. Vol. 13, No. 4. P. 501-507.
2. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer, 2002. P. 43-51.
3. Diantong Liu, Weiping Guo, Jianqiang Yi, Dongbin Zhao. Passivity-based-control for a class of underactuated mechanical systems // Proceedings of 2004 International Conference on Intelligent Mechatronics and Automation. Chengdu, China, 2004. P. 50-54.
4. Romero J.G., Donaire A., Borja P. Global Stabilisation of Underactuated Mechanical Systems via PID Passivity-Based Control // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 9577-9582.
5. Papadopoulos A.D., Rompokos A.A., Alexandridis A.T. Nonlinear and observer-based PD position and sway control of convey-crane systems // Proceedings of 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). Athens, 2016. P. 696-700.
6. Slotine J.E. Sliding controller design for non-linear systems // International Journal of Control. 1984. Vol. 40, No. 2. P. 421-434.
7. Utkin V.I., Guldner J, Shi J. Sliding mode control in electromechanical systems. NewYork: CRC Press, 2009. 485 p.
8. Qian D., Yi J., Zhao D., Hao Y. Hierarchical Sliding Mode Control for Series Double Inverted Pendulums System // 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Beijing, 2006. P. 4977-4982.
9. Yi-Jen Mon, Chih-Min Lin. Hierarchical fuzzy sliding-mode control // 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence. 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. FUZZ-IEEE'02. Proceedings (Cat. No.02CH37291). Honolulu, HI, USA, 2002. Vol. 1. P. 656-661.
10. Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016. № 4. С. 10-21.
11. Краснова С.А., Мысик Н.С. Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 106-128.
12. Краснова С.А., Уткин А.В. Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 27-36.