

УДК 519.71

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА В ПЛОСКОМ ЛАБИРИНТЕ

А.Е. Голубев

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Нэй Тве

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Н.В. Уткина

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Ключевые слова: терминальное управление, обратная задача динамики, ограничения на состояния, квадрокоптеры.

Аннотация: Рассмотрена задача управления движением квадрокоптера в плоском лабиринте. Предложен алгоритм построения программного движения при наличии ограничений на состояния системы в виде плоского лабиринта. Использована полная модель движения квадрокоптера как твердого тела без предположений о малости углов Эйлера. Для синтеза нелинейного алгоритма управления применен метод обратных задач динамики. Приведены результаты численного моделирования.

1. Математическая модель движения квадрокоптера в горизонтальной плоскости и постановка задачи

Рассмотрим поступательное и вращательное движение квадрокоптера как твердого тела, описываемое соответственно системами уравнений [2,3,6]:

$$(1) \quad \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= F \begin{pmatrix} -\cos \gamma \cos \psi \sin \theta + \sin \gamma \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \gamma \end{pmatrix}, \\ m\ddot{z} &= -mg + F \cos \theta \cos \gamma \end{aligned}$$

и

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{\eta} &= C(\eta)\omega, \\ I\dot{\omega} &= M - \omega \times I\omega, \end{aligned}$$

где $\xi = (x, y)^T$ и z – координаты центра масс аппарата в инерциальной системе координат; γ, θ, ψ – углы крена, тангажа и рысканья соответственно, $\eta = (\gamma, \theta, \psi)^T$; m – масса аппарата, g – ускорение силы тяжести; F – суммарная сила тяги, создаваемая винтами; $M = (M_x, M_y, M_z)^T$ – вектор моментов, создаваемых винтами; $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ – вектор угловых скоростей в системе координат, жестко связанной с корпусом аппарата, $I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$ – диагональная матрица моментов инерции,

$$C(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin \gamma \operatorname{tg} \theta & -\cos \gamma \operatorname{tg} \theta \\ 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma \operatorname{sec} \theta & \cos \gamma \operatorname{sec} \theta \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для квадрокоптера сила тяги F и вектор моментов M являются функциями угловых скоростей вращения винтов $\Omega_i, i = \overline{1, 4}$, и имеют вид [6]

$$\begin{pmatrix} F \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k & k & k \\ 0 & kl & 0 & -kl \\ -kl & 0 & kl & 0 \\ b/k & -b/k & b/k & -b/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{pmatrix},$$

где k, b – аэродинамические характеристики винтов; l – расстояние между центром масс квадрокоптера и винтами.

Далее в работе будем рассматривать силу тяги F и момент M в качестве управлений. Для удобства в системе (2) определим новые управляющие переменные \tilde{M} , связанные с переменными M следующим образом:

$$(3) \quad \tilde{M} = \dot{C}\omega + CI^{-1}(M - \omega \times I\omega),$$

и запишем систему (2) в виде

$$\dot{\eta} = \tilde{M}.$$

Фиксируем произвольную горизонтальную плоскость $z = z_0 = \text{const}$. Выбрав начальные условия $z(0) = z_0, \dot{z}(0) = 0$, при управлении

$$(4) \quad F = \frac{mg}{\cos \theta \cos \gamma}$$

из третьего уравнения системы (1) имеем $\ddot{z}(t) = 0$. Далее, в результате подстановки управления (4) в первые два уравнения системы (1) получим следующие уравнения движения квадрокоптера в горизонтальной плоскости:

$$(5) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} &= g \begin{pmatrix} -\cos \psi \operatorname{tg} \theta + \sin \psi \operatorname{tg} \gamma \operatorname{sec} \theta \\ -\sin \psi \operatorname{tg} \theta - \cos \psi \operatorname{tg} \gamma \operatorname{sec} \theta \end{pmatrix}, \\ \dot{\eta} &= \tilde{M}. \end{aligned}$$

Для последующего синтеза управления методом обратных задач динамики [4] запишем систему (5) в виде

$$(6) \quad \xi^{(IV)} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{pmatrix} \tilde{M},$$

$$c_3 = -\frac{420(p_0 - p_*) + T(216\dot{p}_0 + 204\dot{p}_*) + T^3(4p_0^{(3)} + 3p_*^{(3)}) + T^2(45\ddot{p}_0 - 39\ddot{p}_*)}{6T^6},$$

$$c_4 = \frac{T^3(p_0^{(3)} + p_*^{(3)}) + T^2(12\ddot{p}_0 - 12\ddot{p}_*) + T(60\dot{p}_0 + 60\dot{p}_*) + 120(p_0 - p_*)}{6T^7}.$$

Здесь $p_0 = x(0) = x_0$, $\dot{p}_0 = \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\ddot{p}_0 = \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$, $p_0^{(3)} = x^{(3)}(0) = x_0^{(3)}$ и $p_* = x(T) = x_*$, $\dot{p}_* = \dot{x}(T) = \dot{x}_*$, $\ddot{p}_* = \ddot{x}(T) = \ddot{x}_*$, $p_*^{(3)} = x^{(3)}(T) = x_*^{(3)}$ для многочлена (7), фазовый график $\bar{p}(t) = (p(t), \dot{p}(t), \ddot{p}(t), p^{(3)}(t))$, $t \in [0, T]$, которого соединяет точки $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, x_0^{(3)})$ и $(x_*, \dot{x}_*, \ddot{x}_*, x_*^{(3)})$ в фазовом пространстве x подсистемы динамической системы (6).

Аналогично, $p_0 = y(0) = y_0$, $\dot{p}_0 = \dot{y}(0) = \dot{y}_0$, $\ddot{p}_0 = \ddot{y}(0) = \ddot{y}_0$, $p_0^{(3)} = y^{(3)}(0) = y_0^{(3)}$ и $p_* = y(T) = y_*$, $\dot{p}_* = \dot{y}(T) = \dot{y}_*$, $\ddot{p}_* = \ddot{y}(T) = \ddot{y}_*$, $p_*^{(3)} = y^{(3)}(T) = y_*^{(3)}$ для многочлена (7), фазовый график $\bar{p}(t) = (p(t), \dot{p}(t), \ddot{p}(t), p^{(3)}(t))$, $t \in [0, T]$, которого соединяет точки $(y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0, y_0^{(3)})$ и $(y_*, \dot{y}_*, \ddot{y}_*, y_*^{(3)})$ в фазовом пространстве y подсистемы динамической системы (6).

Далее, воспользуемся свободой выбора времени T движения из точки (x_0, y_0) в точку (x_*, y_*) . Заметим, что одним из способов выполнения ограничений на переменные x , y состояния системы (6), связанных с движением из точки (x_0, y_0) в точку (x_*, y_*) в плоском лабиринте, является монотонность соответствующих многочленов (7) на отрезке $t \in [0, T]$. Выбрав $\ddot{p}_0 = 0$, $\ddot{p}_* = 0$, $p_0^{(3)} = 0$, $p_*^{(3)} = 0$, $T = 2(p_* - p_0)/(\dot{p}_* + \dot{p}_0)$ и \dot{p}_* , \dot{p}_0 таким образом, что выполнены условия $\dot{p}_0\dot{p}_* > 0$ и $T > 0$ [1, 5], легко убедиться, что соответствующий многочлен (7) представляет собой строго монотонную функцию t на отрезке $t \in [0, T]$.

Построенная программная траектория $\xi = \xi_r = (x_r(t), y_r(t))$, соединяющая выбранные начальную и конечную точку движения в лабиринте, представлена на рис. 1.

3. Синтез управления при помощи метода обратных задач динамики

Заметим, что применить метод обратных задач динамики непосредственно к системе (6) нельзя, так как матрица коэффициентов при управлении \tilde{M} имеет размер 2×3 . Однако, одну из управляющих переменных $\tilde{M} = (\tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z)^T$ можно выбрать заранее. Согласно работе [3] фиксируем заданное программное изменение угла рысканья $\psi = \psi_r(t)$. Тогда стабилизирующее управление \tilde{M}_z , реализующее заданное изменение угла рысканья, запишется как

$$(8) \quad \tilde{M}_z = \ddot{\psi}_r(t) - k_1(\psi - \psi_r(t)) - k_2(\dot{\psi} - \dot{\psi}_r(t)), \quad k_1, k_2 > 0.$$

Система (6), замкнутая управлением (8), примет вид

$$(9) \quad \xi^{(iv)} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} - g \sec \theta \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sec \theta \\ \sec^2 \gamma & \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица коэффициентов при управлениях \tilde{M}_x и \tilde{M}_y невырождена и имеет обратную при $\gamma, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Рассмотрим переменную ошибки $z = \xi - \xi_r(t)$, где $\xi_r(t)$ – построенная выше программная траектория движения в плоском лабиринте. Тогда для системы (9) управления \tilde{M}_x, \tilde{M}_y , найденные при помощи метода обратных задач динамики и решающие задачу отслеживания программной траектории $\xi = \xi_r = (x_r(t), y_r(t))$, запишутся следующим образом [4]:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{pmatrix} = G^{-1} \left[- \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} + \xi_0^{(4)}(t) - C_1 z^{(3)} - C_2 \ddot{z} - C_3 \dot{z} - C_4 z \right],$$

где матрицы C_i коэффициентов усиления выбраны таким образом, что положение равновесия $z = 0$ замкнутой системы

$$(11) \quad z^{(4)} + C_1 z^{(3)} + C_2 \ddot{z} + C_3 \dot{z} + C_4 z = 0$$

асимптотически устойчиво. Дополнительно матрицы C_i могут быть выбраны так, чтобы было обеспечено требуемое качество переходных процессов системы (11), например, аналогично работе [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-07-00817 и 17-07-00653).

Список литературы

1. Голубев А.Е. Крищенко А.П. Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 101-114.
2. Глазков Т.В., Голубев А.Е. Отслеживание программного изменения углового положения квадрокоптера // Математика и математическое моделирование. 2017. № 5. С. 14-28.
3. Глазков Т.В., Голубев А.Е. Управление движением квадрокоптера в горизонтальной плоскости // Материалы XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Конференция Пятницкого). Москва, 30 мая - 01 июня 2018 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2018. С. 108-111.
4. Краснощеченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 519 с.
5. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Utkina N.V., Velishchanskiy M.A. Solution of a terminal control problem under state constraints // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50б No. 1. P. 10679-10684.
6. Luukkonen T. Modelling and control of quadcopter. 2011. http://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf