УДК 519.71

УПРАВЛЕНИЕ ВЗЛЕТОМ САМОЛЕТА В УСЛОВИЯХ СДВИГА ВЕТРА

А.Е. Голубев

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Н.В. Уткина

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Ключевые слова: обратная задача динамики, стабилизация, бэкстеппинг, ограничения на состояния.

Аннотация: Рассмотрена задача управления взлетом самолета в условиях сдвига ветра. Использована математическая модель движения самолета в вертикальной плоскости как материальной точки. Предложен алгоритм построения программного движения при наличии ограничений на состояния системы. Для синтеза стабилизирующего управления применен метод обхода интегратора (бэкстеппинг).

1. Математическая модель продольной динамики самолета и постановка задачи

Рассмотрим динамику центра масс самолета в присутствии сдвига ветра [2, 5–8]. Будем полагать, что масса самолета постоянная, движение происходит только в вертикальной плоскости, плотность атмосферы постоянна. Отметим, что указанные допущения типичны при моделировании режима взлета самолета [5]. Пренебрежем также инерцией вращения самолета вокруг центра масс. Уравнения движения центра масс самолета записываются следующим образом [7]:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = V\cos\gamma + W_x,\\
&\dot{h} = V\sin\gamma + W_h,\\
&\dot{V} = \frac{1}{m}\big(T\cos(\alpha+\delta) - D - mg\sin\gamma\big) - \big(\dot{W}_x\cos\gamma + \dot{W}_h\sin\gamma\big),\\
&\dot{\gamma} = \frac{1}{mV}\big(T\sin(\alpha+\delta) + L - mg\cos\gamma\big) + \frac{1}{V}\big(\dot{W}_x\sin\gamma - \dot{W}_h\cos\gamma\big),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где x и h – горизонтальная и вертикальная координаты центра масс в земной инерциальной системе координат соответственно; V – модуль вектора скорости центра масс относительно потока воздуха; W_x и W_h – соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости потока воздуха относительно инерциальной системы координат, характеризующие сдвиг ветра; $L = L(V,\alpha)$ – аэродинамическая подъемная сила; $D = D(V,\alpha)$ – аэродинамическая сила сопротивления; $T = T(V)$ – сила тяги; α – относительный угол атаки; γ – относительный угол наклона траектории; δ – постоянный угол наклона вектора силы тяги относительно оси симметрии летательного аппарата; m – масса самолета; g – ускорение свободного падения.

В системе (1) сила тяги и аэродинамические силы имеют соответственно вид

$$
\begin{aligned}
&T = \delta_T(A_0 + A_1 V + A_2 V^2),\\
&D = \frac{1}{2}C_D(\alpha)\varrho S V^2, \quad C_D(\alpha) = B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2,\\
&L = \frac{1}{2}C_L(\alpha)\varrho S V^2,\\
&C_L(\alpha) = \begin{cases} C_0 + C_1\alpha, & 0 < \alpha < \alpha_{**},\\ C_0 + C_1\alpha + C_2(\alpha-\alpha_{**})^2, & \alpha \geqslant \alpha_{**},\end{cases}
\end{aligned}
$$

где $\delta_T \in [0,1]$ – переменная управления величиной силы тяги; S – расчетная площадь; ϱ – плотность атмосферы (постоянная); A_i, B_i, C_i, $i = \overline{0,2}$, α_{**} – константы, зависящие от типа самолета и условий внешней среды [7, 8].

В качестве управляющих переменных в системе (1) будем рассматривать относительный угол атаки α и переменную δ_T. Далее для удобства определим соответственно продольную и поперечную перегрузки

$$
n_x = \frac{1}{mg}\big(T\cos(\alpha+\delta) - D\big),\; n_h = \frac{1}{mg}\big(T\sin(\alpha+\delta) + L\big).
$$

Тогда система (1) запишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = V\cos\gamma + W_x,\\
&\dot{h} = V\sin\gamma + W_h,\\
&\dot{V} = \big(n_x - \sin\gamma\big)g - \big(\dot{W}_x\cos\gamma + \dot{W}_h\sin\gamma\big),\\
&\dot{\gamma} = \frac{1}{V}\big(n_h - \cos\gamma\big)g + \frac{1}{V}\big(\dot{W}_x\sin\gamma - \dot{W}_h\cos\gamma\big),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где переменные n_x и n_h рассмотрим в качестве новых управлений.

В настоящей работе решается задача синтеза законов управления $n_x = n_x(x,h,V,\gamma)$ и $n_h = n_h(x,h,V,\gamma)$, обеспечивающих выполнение для решений замкнутой системы (2) при всех $t > 0$ условий $h(t) > 0$, $V(t) \in [\underline{V},\overline{V}]$, $\gamma(t) \in [\underline{\gamma},\overline{\gamma}]$, где $\underline{V}$, $\overline{V}$, $\underline{\gamma}$, $\overline{\gamma}$ – постоянные, зависящие от типа самолета. Горизонтальную W_x и вертикальную W_h компоненты вектора скорости потока воздуха, а также их производные по времени $\dot{W}_x$ и $\dot{W}_h$ соответственно будем рассматривать как возмущения и считать неизвестными непрерывными ограниченными функциями времени. Будем полагать, что при всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $|W_h(t)| \leqslant D_1$, $|\dot{W}_h(t)| \leqslant D_2$, где D_1, D_2 – некоторые положительные постоянные.

2. Синтез программного и стабилизирующего управлений

Для решения рассматриваемой задачи управления запишем систему (2) в новых переменных состояния

$$x_1 = h,\ x_2 = \dot h = V\sin\gamma,\ x_3 = x,\ x_4 = \dot x = V\cos\gamma. \tag{3}$$

Заметим, что соотношения (3) в области $\mathbb{R}^4$, заданной неравенствами $|\gamma| < \pi/2$, $V > 0$, определяют гладкую невырожденную замену переменных. В выбранных переменных система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot x_1 = x_2 + W_h,\\ &\dot x_2 = -g + gn_x\sin\gamma + gn_h\cos\gamma - \dot W_h,\\ &\dot x_3 = x_4 + W_x,\\ &\dot x_4 = gn_x\cos\gamma - gn_h\sin\gamma - \dot W_x. \end{aligned} \tag{4}$$

Используем далее новые управления

$$u_1 = -g + gn_x\sin\gamma + gn_h\cos\gamma,\ u_2 = gn_x\cos\gamma - gn_h\sin\gamma.$$

Тогда переменные n_x и n_h выражаются через u_1 и u_2 следующим образом:

$$n_x = (\frac{u_1}{g} + 1)\sin\gamma + \frac{u_2}{g}\cos\gamma,\ n_h = (\frac{u_1}{g} + 1)\cos\gamma - \frac{u_2}{g}\sin\gamma$$

и система (4) примет вид

$$\begin{aligned} &\dot x_1 = x_2 + W_h, &\qquad &\dot x_3 = x_4 + W_x,\\ &\dot x_2 = u_1 - \dot W_h, & &\dot x_4 = u_2 - \dot W_x. \end{aligned} \tag{5}$$

Построим сначала программную траекторию системы (5) по переменной x_1, соответствующей высоте h центра масс самолета над поверхностью Земли. Фиксируем произвольные начальные значения $x_1(0) = h_0$, $x_2(0) = \dot h_0$ и желаемые конечные значения $x_1(t_*) = h_*$, $x_2(t_*) = \dot h_*$ соответственно высоты и скорости набора высоты центра масс самолета. Для соединения на фазовой плоскости двух точек $(h_0, \dot h_0)$ и $(h_*, \dot h_*)$ воспользуемся многочленом третьего порядка, имеющим вид [1]

$$h_r(t) = h_0 + \dot h_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3, \tag{6}$$

где

$$c_1 = -\big((2\dot h_0 + \dot h_*)t_* + 3(h_0 - h_*)\big)/t_*^2,\ c_2 = \big((\dot h_0 + \dot h_*)t_* + 2(h_0 - h_*)\big)/t_*^3.$$

Фазовый график $\overline{h}_r(t) = (h_r(t), \dot h_r(t))$, $t \in [0, t_*]$, многочлена (6) соединяет точки $(h_0, \dot h_0)$ и $(h_*, \dot h_*)$ на фазовой плоскости, причем $h_r(t_*) = h_*$, $\dot h_r(t_*) = \dot h_*$.

Далее, воспользуемся свободой выбора времени t_* движения на фазовой плоскости из точки $(h_0, \dot h_0)$ в точку $(h_*, \dot h_*)$. Заметим, что одним из способов выполнения ограничений по модулю на программные значения переменных x_1, x_2 состояния системы (5) при нулевых значениях возмущений W_h, $\dot W_h$ является монотонность многочлена (6) и его производной по времени на отрезке $t \in [0, t_*]$. Выбрав согласно работам [1, 3] значение $t_* = 2(h_* - h_0)/(\dot h_0 + \dot h_*)$, получим $c_2 = 0$ и при $h_* > h_0$, $\dot h_0 > 0$, $\dot h_* > 0$ справедливо неравенство $t_* > 0$. Легко убедиться, что в этом случае соответствующий многочлен (6) и его производная по времени представляют собой строго монотонные функции t на отрезке $t \in [0, t_*]$.

Программное управление $u_1 = u_1(t)$, найденное согласно методу обратных задач динамики и являющееся решением рассмотренной выше терминальной задачи для h подсистемы системы (5) при нулевых значениях возмущений W_h, $\dot W_h$, запишется следующим образом [1]:

$$u_1 = \ddot h_r(t). \tag{7}$$

При ненулевых значениях возмущений W_h, $\dot W_h$ в первых двух уравнениях системы (5) рассмотрим переменные ошибки $\xi_1 = x_1 - h_r(t)$ и $\xi_2 = x_2 - \dot h_r(t)$, динамика которых имеет вид

$$\begin{aligned} \dot\xi_1 &= \xi_2 + W_h, \\ \dot\xi_2 &= v_1 - \dot W_h, \end{aligned} \tag{8}$$

где $v_1 = u_1 - \ddot h_r(t)$ – новая переменная управления. Для стабилизации нулевых значений переменных $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ возмущенной системы (8) при наличии ограничений вида $|\xi_i(t)| \leqslant M_i$ при всех $t \in [0, t_*]$, $i = 1, 2$, воспользуемся методом синтеза управления на основе обхода интегратора (бэкстеппинга) [4], изложенным в работе [9]. Построенное стабилизирующее управление запишется следующим образом:

$$v_1 = -(c_3 + c_4 + c_5)z_2 - (c_1 + c_2)\xi_2 - \frac{k_1 z_1 (N_2^2 - z_2^2)}{k_2 (N_1^2 - z_1^2)}, \tag{9}$$

где k_1, k_2 – произвольные положительные константы, $z_1 = \xi_1$, $z_2 = \xi_2 + (c_1 + c_2)z_1$, $N_1 = M_1$, $N_2 = M_2 - (c_1 + c_2)M_1$. Положительные постоянные M_1, M_2 и c_i, $i = \overline{1,5}$, выбираются таким образом, что выполнены неравенства

$$\frac{D_1}{\sqrt{4c_1c_2}} < N_1, \quad \sqrt{\frac{D_2^2}{4c_3c_4} + \frac{(c_1 + c_2)^2 D_1^2}{4c_3c_5}} < N_2.$$

Далее, аналогично работе [9] можно показать, что для решений системы (8), замкнутой управлением (9), при всех $t \in [0, t_*]$ имеют место неравенства $|z_1(t)| \leqslant N_1$, $|z_2(t)| \leqslant N_2$, что равносильно выполнению условий $|\xi_1(t)| \leqslant M_1$, $|\xi_2(t)| \leqslant M_2$. Более того, согласно работе [10] замкнутая управлением (9) система (8) обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа $(W_h, \dot W_h)^T$ [10] и для любых начальных условий $\xi_1(0) = \xi_1^0$, $\xi_2(0) = \xi_2^0$ таких, что $|\xi_1^0| \leqslant M_1$, $|\xi_2^0| \leqslant M_2$, и любых положительных чисел $\varepsilon_1 < M_1$, $\varepsilon_2 < M_2$, существуют такое значение независимой переменной $t = t_1 \geqslant 0$, зависящее от ξ_1^0 и ξ_2^0, и положительные постоянные c_i, $i = \overline{1,5}$, что для соответствующего решения $\xi_1 = \xi_1(t)$, $\xi_2 = \xi_2(t)$ системы (8) с управлением (9) при всех $t \geqslant t_1$ справедливо неравенство $|\xi_1(t)| \leqslant \varepsilon_1$, $|\xi_2(t)| \leqslant \varepsilon_2$.

Таким образом, для любых заданных начальных значений $x_1(0) = h_0$, $x_2(0) = \dot h_0$ и произвольных положительных постоянных D_1, D_2 всегда можно выбрать значения констант M_i, $i = 1, 2$, и c_i, $i = \overline{1,5}$, таким образом, что для произвольного положительного $N < \dot h_0$ и соответствующего решения h подсистемы системы (5), замкнутой управлением

$$u_1 = -(c_3 + c_4 + c_5)(c_1 + c_2)\bigl(x_1 - h_r(t)\bigr) - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)\bigl(x_2 - \dot h_r(t)\bigr) +$$

$$+\ddot{h}_r(t) - \frac{k_1(x_1 - h_r(t))\Big(N_2^2 - \big(x_2 - \dot{h}_r(t) + (c_1 + c_2)(x_1 - h_r(t))\big)^2\Big)}{k_2\big(N_1^2 - (x_1 - h_r(t))^2\big)},$$

при всех $t \in [0, t_*]$ выполнено $x_1(t) = h(t) > 0$ и $0 < \dot{h}_0 - N \leqslant x_2(t) = \dot{h}(t) \leqslant \dot{h}_0 + N$.

Далее, аналогичным образом построив программное движение по переменным x_3, x_4 для x подсистемы системы (5) и соответствующее стабилизирующее управление $u_2 = u_2(x_3, x_4)$, обеспечим выполнение условия $0 < \dot{x}_0 - M \leqslant x_4(t) = \dot{x}(t) \leqslant \dot{x}_0 + M$ при всех $t \in [0, t_*]$, где M – произвольная положительная постоянная, $M < \dot{x}_0$.

Наконец, выбрав надлежащим образом положительные постоянные N и M, в силу соотношений $x_2(t) = V(t)\sin(\gamma(t))$ и $x_4(t) = V(t)\cos(\gamma(t))$ обеспечим выполнение условий $V(t) \in [\underline{V}, \overline{V}]$ и $\gamma(t) \in [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$ при всех $t \in [0, t_*]$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-07-00817 и 17-07-00653).

Список литературы

1. Голубев А.Е. Крищенко А.П. Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 101-114.
2. Chen Y.H., Pandey S. Robust control strategy for take-off performance in a windshear // Optimal Control Applications and Methods. 1989. Vol. 10, No. 1. P. 65-79.
3. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Utkina N.V., Velishchanskiy M.A. Solution of a terminal control problem under state constraints // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 10679-10684.
4. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
5. Leitmann G., Pandey S. Adaptive control of aircraft in windshear // International journal of robust and nonlinear control. 1993. Vol. 3. P. 133-153.
6. Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J. Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: aircraft model and control schemes // Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). Valletta, Malta. 2017. P. 277-284.
7. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // Journal of optimization theory and applications. 1986. Vol. 49, No. 1. P. 1-45.
8. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Guidance strategies for near-optimum take-off performance in a windshear // Journal of optimization theory and applications. 1986. Vol. 50, No. 1. P. 1-47.
9. Ngo K.B., Mahony R., Jiang Z.P. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville, Spain. 2005. P. 8306-8312.
10. Sontag E.D., Wang Y. New characterizations of input to state stability // IEEE transactions on automatic control. 1996. Vol. 41, No. 9. P. 1283-1294.