УДК 517.977

ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ИМПУЛЬСНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

О.Г. Матвийчук

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского

Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

E-mail: vog@imm.uran.ru

Ключевые слова: множество достижимости, импульсное управление, многозначные оценки, эллипсоидальное оценивание.

Аннотация: Рассматривается задача оценивания множеств достижимости управляемой динамической системы с импульсным управлением и неопределенностями по начальным данным и в матрице коэффициентов системы. Предполагается, что неизвестные элементы матрицы линейных слагаемых в фазовых скоростях системы принадлежат заданному компакту, то есть динамика системы осложнена наличием билинейных составляющих в правых частях дифференциальных уравнений системы. Начальные состояния также точно неизвестны, но принадлежат заданному звездному симметричному невырожденному многограннику. На основе полученных результатов был разработан численный алгоритм, позволяющий строить внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости рассматриваемых систем в пространстве $\mathbb{R}^n$.

1. Введение

В докладе представлены результаты исследований, которые основаны на математической теории управления и оценивания состояний в условиях неопределенности [6, 11, 13, 14]. Была исследована задача оценивания множеств достижимости импульсной управляемой системы с неопределенностью в динамике системы и при отсутствии полной информации о начальных состояниях системы. Предполагается, что неизвестные начальные состояния принадлежат симметричному невырожденному многограннику, в общем случае не обязательно выпуклому. Вопросам оценивания множеств достижимости для выпуклых начальных множеств посвящен ряд исследований, например [1, 2, 6, 10, 11, 13, 14]. Однако во многих прикладных задачах множества начальных и допустимых состояний системы могут быть невыпуклыми и обладать особыми свойствами (например, быть звездными). В этом случае полезно иметь оценки для точных множеств достижимости.

В представленном исследовании рассматривается билинейная система — вид нелинейной системы, где матрица, включенная в дифференциальные уравнения системы, является неопределенной, известны только границы допустимых возмущений параметров матрицы [1,2,4,8,14]. Такие системы могут моделировать различные механические, электрические и другие типы систем, параметры которых неизвестны, но могут варьироваться в определенных пределах. В качестве примера можно указать механические системы, в которых коэффициенты жесткости или трения заданы неточно. Управляющие функции в рассматриваемой динамической системе являются обобщенными (импульсными) и выбираются в классе мер, порождаемых скалярными функциями ограниченной вариации на заданном временном отрезке.

Одни из наиболее развитых подходов к оцениванию множеств достижимости — это метод эллипсоидального исчисления [10–14] и метод полиэдрального оценивания [5]. В данной работе техника эллипсоидального исчисления развивается для трубок траекторий билинейных управляемых импульсных систем с неопределенностью по начальным данным. Основной результат работы состоит в определении внешних по отношению к операции включения оценок множеств достижимости систем исследуемого здесь класса. На основе полученных результатов был разработан численный алгоритм, позволяющий строить внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости рассматриваемых систем в пространстве $\mathbb{R}^n$.

2. Билинейная импульсная управляемая система

Рассматривается задача импульсного управления трубкой траекторий билинейной дифференциальной системы

$$dx = (A(t)x + u(t))dt + B(t)dv, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x_0 \in \mathcal{X}_0 = \mathcal{M}(p), \tag{2}$$

где $\mathcal{M}(p)$ — симметричный невырожденный многогранник с $2m$ вершинами ($m \geqslant n$) и центром $p \in R^n$; измеримым управлением $u(t)$, стесненным ограничением

$$u(t) \in \mathcal{U} = E(\hat{a}, \hat{Q}). \tag{3}$$

где $E(\hat{a}, \hat{Q})$ — эллипсоид с центром $\hat{a} \in \mathbb{R}^n$ и симметрической положительно определенной матрицей $\hat{Q}$; и импульсным управлением $v(t)$, где $v(t)$ — скалярная функция ограниченной вариации,непрерывная справа на отрезке $[t_0, T]$ и удовлетворяющая ограничению (параметр $\mu > 0$ задан): $\operatorname*{Var}\limits_{t \in [t_0, T]} v(t) \leqslant \mu$. Вектор-функция $B(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ в (1) является непрерывной на $[t_0, T]$.

Предполагается, что $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в системе (1) имеет специальный вид

$$A(t) = A^0(t) + A^1(t), \quad t \in [t_0, T],$$

где матрица $A^0(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ задана; матрица $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ ($t \in [t_0, T]$),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1 = \{\ & A{=}\{a_{ij}\} \in R^{n \times n} : a_{ij} = 0 \ \text{ для } i \neq j, \\ & a_{ii} = a_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad a = (a_1, \ldots, a_n), \quad a'Da \leqslant 1\}, \end{aligned}$$

где $D \in R^{n\times n}$ - положительно определенная матрица,

$$(4) \qquad A(t) \in \mathcal{A}(t) = A^0(t) + \mathcal{A}^1, \quad t \in [t_0, T].$$

Обозначим символом $\mathcal{U}$ класс всех допустимых измеримых управлений $u(\cdot)$, символом $\mathcal{V}$ — класс допустимых управлений-мер $v(\cdot)$ и символом $x(t) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot), A(\cdot))$ решение системы (1)–(4) на промежутке $[t_0, T]$ при ограничениях $x_0 \in \mathcal{X}_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $A(\cdot) \in \mathcal{A}$. Трубку траекторий системы (1)–(4) обозначим ($t \in [t_0, T]$)

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}(\cdot) = \mathcal{X}(\cdot\,; t_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{V}) = \\ &= \bigcup \big\{x(\cdot) : \ x_0 \in \mathcal{X}_0, \ A(\cdot) \in \mathcal{A}, \ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \ v(\cdot) \in \mathcal{V}\big\}. \end{aligned}$$

Сечение трубки траекторий $\mathcal{X}(\cdot)$ в момент времени $t \in [t_0, T]$ совпадает с множеством достижимости $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t; \mathcal{U}, \mathcal{X}_0)$ системы (1)–(4) в момент t, построенного из начального состояния $\{t_0, \mathcal{X}_0\}$.

Целью данной работы является разработка алгоритма построения внешних (относительно операции включения множеств) оценок трубок траекторий $\mathcal{X}(\cdot)$ и соответствующих множеств достижимости $\mathcal{X}(t)$ ($t \in [t_0, T]$) системы (1)–(4), основанных на идеях и методах эллипсоидального исчисления.

Ранее в работах [4, 7–9, 12] были разработаны алгоритмы эллипсоидального оценивания трубок траекторий некоторых видов нелинейных импульсных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. В этих работах начальные состояния были ограничены заданным эллипсоидом в $\mathbb{R}^n$. В представленной работе задача осложнена тем, что начальное множество является симметричным невырожденным многогранником, не обязательно выпуклым. Также существенное отличие постановки задачи оценивания для системы (1)–(4) от постановки задачи, рассмотренных в [4, 7–9, 12], состоит в том, что в данном случае предполагается иной (квадратичный) тип ограничений на элементы неизвестной матрицы $A(t) \in \mathcal{A}(t)$ (4).

Для решения поставленной задачи был разработан метод в котором начальное множество $\mathcal{M}(p)$ оценивается сверху объединением конечного числа эллипсоидов. Далее показано, что множество достижимости исходной системы (1)–(4) содержится в множестве достижимости системы (1) с начальным множеством, являющимся объединением этих эллипсоидов. Такой подход позволяет достаточно гибко учитывать геометрию начального множества. Исследования продолжают тематику, обозначенную в работах [4, 9], и используют результаты [3, 7, 8].

На основе представленного метода был разработан итерационный алгоритм построения семейства эллипсоидов в фазовом пространстве, оценивающих сверху по отношению к операции включения множеств, искомую область достижимости рассматриваемой системы (1)–(4) при ограничениях $x_0 \in \mathcal{X}_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $A(\cdot) \in \mathcal{A}$. Разработанный алгоритм оценивания проиллюстрирован результатами компьютерного моделирования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00544а).

Список литературы

1. Boscain U., Chambrion T., Sigalotti M. On some open questions in bilinear quantum control // Europ. control conf. (ECC). Zurich, Switzerland, July 2013. S. l.: IEEE, 2013. P. 2080-2085.
2. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Vol. 15: Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994. 205 p.
3. Filippova T.F., Lisin D.V. On the estimation of trajectory tubes of differential inclusions // Proc. Steclov Inst. Math., 2000. Vol. Suppl. 2. P. S28-S37.
4. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities // Ural Mathematical Journal, 2015. Vol. 1, No. 1. P. 45-54.
5. Kostousova E.K. State estimates of bilinear discrete-time systems with integral constraints through polyhedral techniques // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, No. 32. P. 245-250.
6. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
7. Matviychuk, O.G. Ellipsoidal estimates of reachable sets of impulsive control systems with bilinear uncertainty // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5, No. 3. P. 96-104.
8. Matviychuk O.G. Estimation Techniques for Bilinear Control Systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, No. 32. P. 877-882.
9. Matviychuk O.G. Estimates of the trajectory tubes of impulsive control systems // Proceedings of the 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference). Moscow, 30 May - 1 June 2018. IEEE Xplore Digital Library, 2018. P. 1-4.
10. Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C. Walter E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty // Automatica. 2004. Vol. 40. P. 1171–1179.
11. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
12. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. Ин-та мат. и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. Т. 15, № 4. С. 262-269.
13. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
14. Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. Т. 60, Вып. 6. 1996. С. 940-950.