УДК 681.511

РАЗМЕЩЕНИЕ И КОНФИГУРИРОВАНИЕ КОРНЕВЫХ ПОРТРЕТОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

А.А. Несенчук
Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Беларусь, 220012, Минск, ул. Сурганова, 6
E-mail: anes@newman.bas-net.by

С.А. Гайворонский
Томский политехнический университет
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 30
E-mail: saga@tpu.ru

Ключевые слова: характеристический полином, интервальная неопределенность, корневой портрет, область качества, конфигурирование.

Аннотация: Рассматриваются интервальные семейства характеристических полиномов динамических систем второго порядка. Устанавливаются закономерности конфигурации корневых портретов рассматриваемых семейств. Выполняется размещение корневых портретов в заданной области качества Q, ограниченной линиями равной степени устойчивости. Приводятся алгоритмы расчета значений параметров семейств, обеспечивающих желаемую конфигурацию и размещение корневых портретов.

1. Введение

Вопросы исследования динамических систем с неопределенными параметрами, в частности полиномиальных семейств, рассматриваются в работах [1, 2]. В книге [1] обсуждаются возможные варианты задания робастности, в том числе полиномиальный, различные условия робастной устойчивости и подходы к робастному синтезу. В [2] описывается также корневой подход. Анализ полиномиального (корневого) подхода к синтезу систем проводится в обзорной статье [3], где отмечается, что особая методика синтеза динамических систем под названием «подход на основе полиномиальных уравнений», возникла в 60-х–70-х годах XX века. Отличительной чертой данной методики является возможность сведения задачи синтеза управления в системе к решению и анализу линейного полинома определенного типа, что непосредственно связано с исследованием динамики корневых портретов систем. В качестве преимуществ данного подхода отмечается в первую очередь его «прозрачность» т.е. обеспечение возможности наблюдать динамику корней системы в явном виде. В этой связи представляется целесообразным развитие данного подхода в направлении его применения к исследованию полиномиальных семейств. В данной статье получило развитие корневое направление, рассматриваемое в работах [4–6], посвященных синтезу систем на основе корневых портретов, синтезу полиномиальных семейств по заданным критериям качества.

2. Постановка задачи

Рассмотрим характеристический полином интервальной динамической системы (ИДС) в следующей форме:

(1) $$P(s)=\sum_{j=0}^{n} a_j s^{n-j}=0,$$

где $a_j \in [\underline{a}_j, \overline{a}_j]$, $\underline{a}_0>0$, $j=0,...,n$, $\underline{a}_j$ и $\overline{a}_j$ – соответственно нижняя и верхняя границы замкнутого интервала неопределенности $[\underline{a}_j, \overline{a}_j]$, $s=\sigma+i\omega$. Коэффициенты полинома (1) будем рассматривать, как его неопределенные параметры.

Перепишем полином (1) для степени n=2,

(2) $$P_2(s)=s^2+a_1 s+a_2.$$

Выделив a_2 из (2) и сделав замену переменного, $s=\sigma+i\omega$, получим выражение

(3) $$a_2=f(s)=-\frac{\phi(s)}{\psi(s)}=-(\sigma^2+a_1\sigma-\omega^2+(2\sigma+a_1)\omega\ i).$$

Выражение (3) представляет собой функцию отображения элементов-образов в плоскости параметра a_2 на плоскость комплексного переменного s.

На основании (3) получим уравнение корневого годографа (УКГ) Бендрикова – Теодорчика при вариации свободного члена и уравнение параметра годографа (УП) [5]:

(4) УКГ: $2\sigma\omega+a_1\omega=0$,

(5) УП: $\sigma^2-\omega^2+a_1\sigma+a_2=0$.

Таким образом, согласно (4) УКГ в комплексной плоскости:

(6) $$\sigma=-\frac{a_1}{2},$$

На основании (5) получим выражение для вычисления параметра a_2:

(7) $$a_2=-\sigma^2+\omega^2-a_1\sigma=\sigma^2+\omega^2.$$

Задачи данной работы состоят в следующем:

a) обеспечить желаемую конфигурацию корневого портрета семейства (2) по одному из следующих двух вариантов: полностью в комплексной плоскости или частично в комплексной плоскости (с выходом на действительную ось);
b) обеспечить размещение корневого портрета семейства (2) в заданной области качества Q, ограниченной двумя линиями равной степени устойчивости.

3. Конфигурирование корневого портрета

3.1. Конфигурация в комплексной плоскости

Утверждение 1. *Корневой портрет интервального семейства (2) располагается полностью в комплексной плоскости, если выполняется следующее условие:*

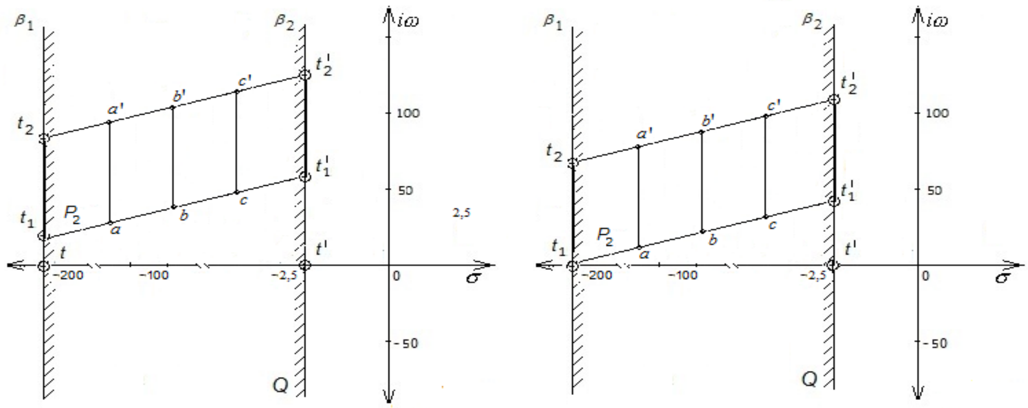
(8) $$\underline{a}_2 \ge \frac{\overline{a}_1^{\,2}}{4},$$

за исключением одной точки с координатой $\sigma=-\frac{\overline{a}_1}{2}$, *в которой портрет касается действительной оси* σ.

Доказательство утверждения 1. Следует из формул (6) и (7) при условии ω=0.

Определение 1. *Корневой портрет семейства (2), удовлетворяющий условию (8), назовем граничным корневым портретом в комплексной плоскости или комплексным (граничным) корневым портретом, а при* $\underline{a}_2 > \frac{\overline{a}_1^2}{4}$ *– корневым портретом в комплексной плоскости или комплексным корневым портретом.*

Варианты комплексного корневого портрета эскизно показаны на рис. 1.



а) б)

Рис. 1. Корневые портреты в комплексной плоскости: а) комплексный: без точки касания оси, $\underline{a}_2 > \frac{\overline{a}_1^2}{4}$; б) комплексный граничный: с точкой касания t_1 оси σ, $\underline{a}_2 \geq \frac{\overline{a}_1^2}{4}$.

На рис. 1 изображен комплексный и комплексный граничный корневой портрет $P_2 = t_1 t_2 t_2' t_1'$. Он сформирован множеством годографов, среди которых, показанные на рис. 1, пять годографов: $t_1 t_2, t_1' t_2', aa', bb', cc'$. $P_2 \subset Q$. Линии $t_1 t_1'$ и $t_2 t_2'$, ограничивающие портрет P_2 сверху и снизу, для большей наглядности изображены прямыми.

3.2. Конфигурация в комплексной плоскости с выходом на действительную ось

Утверждение 2. *Корневой портрет интервального семейства (2) располагается в комплексной плоскости и на действительной оси, если выполняются следующие условия:*

(9) $$\underline{a}_2 \leq \frac{\underline{a}_1^2}{4}, \overline{a}_2 > \frac{\overline{a}_1^2}{4}.$$

Доказательство утверждения 2. Следует из формул (6) и (7) при условии ω=0.

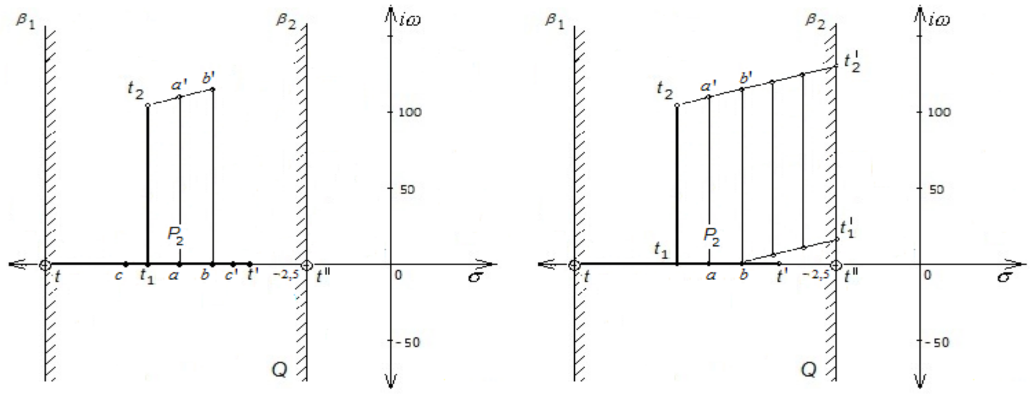
Определение 2. *Корневой портрет семейства (2), удовлетворяющий условиям (9), назовем смешанным корневым портретом.*

Определение 3. *Корневой портрет семейства (2), состоящий из комплексной граничной и смешанной частей, назовем комбинированным корневым портретом.*

Комбинированный портрет удовлетворяет условиям

(10) $$\underline{a}_2 < \frac{\overline{a}_1^2}{4}, \underline{a}_2 > \frac{\underline{a}_1^2}{4}.$$

Смешанный корневой портрет на рис. 2, а) представлен тремя корневыми годографами семейства: bb', $cc'aa'$ и $tt't_1t_2$. Годограф bb' в точке b касается действительной оси; годограф $cc'aa'$ выходит на ось σ (отрезок cc'); годограф $tt't_1t_2$ (показан утолщенными линиями) выходит на действительную ось (отрезок tt') и является левым граничным годографом портрета. Комбинированный портрет на рис. 2, б) ограничен фигурой $t_2t_2't_1'bt_1tt'$, где можно выделить граничную комплексную часть $bb't_2't_1'$ и примыкающую к ней по годографу bb' собственно смешанную часть $bb't_2t_1tt'$ портрета (отрезок tt').



а) б)

Рис. 2. Корневые портреты семейства (2): а) смешанный; б) комбинированный.

4. Размещение корневого портрета в заданной области

4.1. Размещение комплексного корневого портрета

Исходные данные: полином (2) в общем виде; область Q, ограниченная вертикальными линиями β_1 и β_2 с координатами $\sigma(\beta_1)$ и $\sigma(\beta_2)$ (рис. 1).

Требуется определить: $[\underline{a}_1, \overline{a}_1]$ и $[\underline{a}_2, \overline{a}_2] \to P_2 \subset Q$.

Шаг 1. Определение интервала $[\underline{a}_1, \overline{a}_1]$. Согласно (7): $\overline{a}_1 = -2\sigma(\beta_1)$, $\underline{a}_1 = -2\sigma(\beta_2)$. $\max[\underline{a}_1, \overline{a}_1] = tt' \in Q$ (рис. 1).

Шаг 2. Определение интервала $[\underline{a}_2, \overline{a}_2]$. Согласно утверждению 1, выбор границы $\underline{a}_2$ в соответствии с (8) обеспечит выполнение условия $P_2 \subset Q$. Граница $\overline{a}_2$ определяется в зависимости от конкретного приложения, например, $\overline{a}_2 = 1{,}5\underline{a}_2$ или $\overline{a}_2 = 2\underline{a}_2$. В данном случае граничные корневые годографы t_1t_2 и $t_1't_2'$, ограничивающие корневой портрет P_2 слева и справа будут располагаться соответственно на границах β_1 и β_2 (рис. 1). $[\underline{a}_2, \overline{a}_2] = t_1t_2 = t_1't_2'$ и $t_1t_2t_2't_1' = P_2 \in Q$ (рис. 1).

4.2. Размещение смешанного и комбинированного корневого портрета

Исходные данные: полином (2) в общем виде; область Q, ограниченная вертикальными линиями β_1 и β_2 с координатами $\sigma(\beta_1)$ и $\sigma(\beta_2)$ (рис. 2).

Требуется определить: $[\underline{a}_1, \overline{a}_1]$ и $[\underline{a}_2, \overline{a}_2] \to P_2 \subset Q$.

Задача решается согласно установленным закономерностям конфигурации корневых портретов динамических систем второго порядка, описанным в разделе 3 и в [5].

Шаг 1. Определение границы $\overline{a}_1$ интервала $[\underline{a}_1, \overline{a}_1]$.

Согласно (6): $\overline{a}_1 = -2\sigma(t_1)$, где $\sigma(t_1)$ - координата σ точки t_1, которую выбираем в промежутке $(\sigma(\beta_1), \sigma(\beta_2))$ ближе к границе β_1. Например, $\sigma(t_1) = \sigma(t'') + 2/3(\sigma(\beta_1) - \sigma(t''))$.

Шаг 2. Определение интервала $[\underline{a}_2, \overline{a}_2]$. $\underline{a}_2$ определяем, используя формулу (7): $\underline{a}_2 = a_2(t) = -\sigma(t)^2 - \overline{a}_1\sigma(t)$, что соответствует также первому условию (10). $\overline{a}_2$ назначаем согласно условию (9).

Шаг 3. Определение границы $\underline{a}_1$ интервала $[\underline{a}_1, \overline{a}_1]$.

Для смешанного портрета (рис. 2, а)): $\underline{a}_1 = -2\sigma(b)$, где $\sigma(b)$ - координата σ точки b, которую выбираем в промежутке $(\sigma(t_1), \sigma(t'))$, используя формулу (7): $\sigma(b) = \pm\sqrt{\underline{a}_2}$. Значение $\underline{a}_2$ определяется в точке b с координатой $\sigma(b)$, что соответствует первому условию (9).

Для комбинированного портрета (рис. 2, б)): $\underline{a}_1 = -2\sigma(\beta_2)$, что соответствует второму условию (10).

Согласно описанных в разделе 3 и в [5] закономерностей, для выбранных выше интервалов $[\underline{a}_1, \overline{a}_1]$ и $[\underline{a}_2, \overline{a}_2]$ смешанного портрета: $bb' t_2 t_1 t t' = P_2 \in Q$, и комбинированного портрета: $t_2 t_2' t_1' b t_1 t t' = P_2 \in Q$.

Рассмотрены численные примеры размещения корневых портретов приведенных выше конфигураций для семейства (2) в заданной области Q.

5. Заключение

Установлены закономерности конфигурации корневых портретов интервальных семейств характеристических полиномов динамических систем второго порядка. Определена методика размещения корневых портретов в заданной области качества Q, ограниченной линиями равной степени устойчивости. Разработаны алгоритмы расчета значений параметров семейств, обеспечивающих желаемую конфигурацию и размещение корневых портретов в заданной области. Конфигурирование и размещение корневых портретов систем второго порядка важно, поскольку они являются порождающими для портретов третьего, а, значит, и более высоких порядков и, таким образом, определяют их локализацию [6]. По этой причине конфигурация и локализация корневого портрета семейства порядка n в значительной степени определяет робастную устойчивость и робастное качество семейств более высоких порядков. Следует также отметить, что в сравнении с иными, данный подход отличается транспарентностью и наглядностью.

Список литературы

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
2. Dorf R., Bishop R. Modern Control Systems. N.Y.: Prentice Hall, 2011. 1109 p.
3. Kučera V. Polynomial control: past, present, and future // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2007. Vol. 17, No. 8. P. 682-705.
4. Гайворонский С.А. Синтез робастной системы стабилизации натяжения троса для стенда имитации невесомости // Вестник московского авиационного института. 2015. Т. 22, №. 1. С. 67-74.
5. Несенчук А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода. Мн: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. 234 с.
6. Несенчук А.А. Корневой метод синтеза устойчивых полиномов путем настройки всех коэффициентов // Автоматика и телемеханика. 2010. № 8. С. 13-24.