УДК 62.50

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ю.М. Рассадин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: rassadin@ipu.ru

Ключевые слова: перевернутый маятник, скользящие режимы.

Аннотация: Рассмотрена задача стабилизации перевернутого маятника на тележке. В качестве управляющего устройства рассмотрен двигатель постоянного тока. Момент силы трения полагается неизвестным, но ограниченным вместе со своими производными по времени. Применение вихревых алгоритмов синтеза обратной связи позволяет подавить внешние несогласованные возмущения и неизвестные отрицательные моменты сил трения. Конечное управляющее воздействие выбирается в классе разрывных функций с постоянной амплитудой.

1. Введение

Задача стабилизации перевернутого маятника по обратной связи является одной из наиболее иллюстративных в теории управления. Изучение динамики подобных объектов встречается как в классических трудах по механике [3], так и в современных работах [5, 6] Рассмотрение электромеханической системы, как правило, включает в себя анализ механического "медленного"блока переменных состояния, "промежуточного"блока электрических величин и блока "быстрых"переменных, описывающих управляющее устройство на основе микроконтроллера. Различия в темпах движений этих блоков позволяют применять широкую палитру известных методов управления (классических, численных, дискретных и непрерывных), а также допущений различного характера, что также обуславливает интерес к объектам этого класса. Описание механической подсистемы, как правило, сопровождается вводом неопределенных величин различной природы, например, неизвестного в общем случае момента силы трения, которые не могут быть непосредственно компенсированны управлением, и поэтому могут рассматриваться в качестве ограниченных внешних несогласованных (unmatched) возмущений [2]. Вихревые алгоритмы [2] управления [2] позволяют обеспечить асимптотическую инвариантность к возмущениям такого рода. Закон обратной связи, синтезируемый по этому алгоритму, состоит из двух аддитивных величин – непрерывной и разрывной, что создает сложности при реализации. Данную проблему предполагается решить на основе метода эквивалентного управления [4]. Этот метод позволит выбрать обратную связь в классе разрывных фунцкий с постоянной амплитудой, что является оптимальным с точки зрения, например, тепловых потерь в реальных управляющих устройствах.

Работы, посвященные стабилизации перевернутого маятника, как правило, рассматривают либо модели, линеаризованные в окрестности номинальных режимов, либо просто исключают из рассмотрения положения маятника ниже точки подвеса. Причиной тому, по видимому, служат точки $q_1 = \pm\pi/2$, в которых система теряет управляемость. Задачу раскачки маятника, т.е. сообщения ему достаточной для вертикального положения энергии, рассматривают отдельно [5], оговаривая необходимость в дальнейшем переключиться на стратегию балансирования маятника. Основная идея данной работы заключается в том, чтобы рассмотреть неопределенности, возникающие при описании механической подсистемы, и их влияние на синтез обратной связи для исполнительного устройства. Из соображений простоты изложения было решено ограничиться задачей перевода маятника в вертикальное положение. Как показали численные и стендовые эксперименты, такой алгоритм может приводить к довольно продолжительному нахождению маятника в неустойчивом вертикальном равновесии, но не способен гарантированно удерживать в нем маятник.

2. Постановка задачи

Математическая модель маятника описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{J}(gml\sin(q_1) - aml\cos(q_1) - \tau_{fric}), \end{aligned} \tag{1}$$

где q_1 – угол ориентации матяника, отсчитываемый от верхней вертикальной полуоси, q_2 – соответствующая угловая скорость. Постоянные величины: ускорение свободного падения g, параметры, характеризующие конкретную установку – момент инерции относительно подвеса J, масса маятника m, плечо сил l, момент сил трения τ_{fric}. Ускорение тележки a рассматривается как фиктивное управляющее воздействие [1], которое в дальнейшем будет реализовываться исполнительным устройством, двигателем постоянного тока (ДПТ). Вывод уравнений системы (1) можно найти как в [3] на основе уравнений Эйлера-Лагранжа, так и в [6] через второй закон Ньютона. Так как ДПТ не является основным предметом исследования, при математическом описании можно ограничиться простой приведенной моделью первого порядка

$$\dot{v} = -Av - Dq_2 + Bu, \tag{2}$$

где A, D, B – конструктивные положительные параметры ДПТ, v – развиваемый обобщенный момент, u – реальное управляющее воздействие.

Целью управления является перевод маятника из нижнего устойчивого положения равновесия в верхнее неустойчивое, т.е. устремление к нулю угла ориентации $q_1 \to 0$ и угловой скорости $q_2 \to 0$.

3. Синтез базового алгоритма

Уравнения системы (1)-(2) уже разрешены относительно производных, так что следующим шагом обычно следует нормализация. Ввод параметров $\mu = mgl$ и $\omega_0 =$

$\sqrt{mgl/J}$, частоты собственных малых колебаний маятника, позволяет записать уравнение для полной энергии системы (1):

$$E = \mu \left(\frac{{q_2}^2}{2{\omega_0}^2} + \cos(q_1) - 1 \right) \tag{3}$$

Подход базового алгоритма подразумевает синтез закона управления в предположении, что все величины известны или доступны прямому измерению, поэтому моментом силы трения, который полагается неизвестным, а влияет лишь на точность регулирования в верхней точке, в данном разделе можно пренебречь. Продифференцировав энергию системы по времени, получим

$$\frac{dE}{dt} = Jq_2\dot{q}_2 - \mu q_2 \sin(q_1) = -aml\cos(q_1)q_2 \tag{4}$$

Для достижения цели управления необходимо перевести энергию системы из начального состояния $E_0 = -2\mu$ в верхнее положение равновесие $E_c = 0$. Для этого производная по времени от энергии должна быть положительной, а следовательно величина $a\cos(q_1)q_2$ – отрицательной. Для максимизации темпов сходимости энергии к требуемому значению амплитуда входного сигнала должна быть также максимальна. Тогда закон фиктивного управления для ускорения тележки можно записать в виде

$$a^* = \mathrm{sat}_{a_{max}} k(E - E_c) sign(q_2 \cos(q_1)). \tag{5}$$

Такой алгоритм позволит решить задачу накачки энергии в колебания маятника.

4. Модифицированная поверхность скольжения

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{array}{rcl} \dot{e} & = & -vml\cos(q_1)q_2 - \eta, \\ \dot{v} & = & -Av - Bq_2 + Bu, \end{array} \tag{6}$$

где $e = E - E_c$ – невязка энергии маятника, а η обозначает негативное воздействие неучтенных моментов сил. При описанных выше ограничениях на составляющие модели объекта, на основе вихревых алгоритмов, запишем уравнения для поверхности скольжения s [4]:

$$\begin{array}{rcl} s & = & v - v^*, \\ \dot{v}^* & = & -\alpha v^* - M\mathrm{sgn}(e). \end{array} \tag{7}$$

Вихревой алгоритм, как было показано в [2], обеспечивает асимптотическую инвариантность к неизвестным несогласованным возмущениям, в качестве которых рассматривается воздействие неучтенных моментов. Продифференцируем уравнение поверхности скольжения s в соответствии с (1) и (7):

$$\dot{s} = -Av - Dq_2 + Bu + \alpha v^* + M\mathrm{sgn}(e)$$

Выбрав истинное управление в виде $u = -U\mathrm{sgn}(s)$, при достаточно большой амплитуде U, можно обеспечить соотношение $s = 0$, а значит и реализацию вихревого алгоритма [2,4]. Тогда невязка энергии сойдется к нулю, что решает задачу накачки энергии маятника до требуемого значения.

5. Заключение

В данной работе был рассмотрен вопрос стабилизации перевернутого маятника на тележке с горизонтальной степенью свободы. Подробное описание объекта, включающее моменты сухого трения и другие внешние негативные воздействия приводит к возникновению несогласованных возмущений в исполнительном устойстве. В отличии от классических методов, примененный в работе вихревой алгоритм позволяет обеспечить асимптотическую инвариантность к возмущениям такого рода. Реальное управление было выбрано в классе разрывных функций с постоянной амплитудой, что позволяет говорить о простоте синтеза и надежности прикладного применения результатов. Численные эксперименты иллюстрируют работоспособность предложенного подхода. Направлением дальнейших исследований может служить рассмотрение ограничений на аплитуду движения тележки, которое отсутствует в маятнике Фуруты [5], точка подвеса которого совершает вращательные движения вокруг вертикальной оси. Также интерес представляет робастная постановка задачи. К примеру, дополнительный вынесенный груз не только сместит "нулевой"угол ориентации маятника, но и изменит физические параметры установки, такие как массу и момент инерции, что повлечет за собой необходимость подстройки коэффициентов контроллера.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках гранта 18-01-00846а.

Список литературы

1. Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А. и др., Принцип блочного управления. // Автоматика и телемеханика. Ч. I. 1990. № 5. С. 3-13; Ч. II. 1990. № 6. С. 20-31.
2. Кочетков С.А., Уткин В.А. Инвариантность в системах с несогласованными возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2013. № 7. С. 46-83.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, Краткий курс теоретической физики. Кн. 1. Механика. Электродинамика, М.: Наука, 1969. 271 с.
4. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.
5. Åström K.J., Furuta K. Swinging up a pendulum by energy control // Automatica. 2000. Vol. 36, No. 2. P. 287-295.
6. Srinivasan B. et al. A Global Stabilization Strategy for an Inverted Pendulum // IFAC Proceedings Volumes. 2002. Vol. 35, No. 1. P. 133-138.