УДК 517.977.1

РАСШИРЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА МЕТОДОМ НАКРЫТИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

Ю. С. Белинская

Институт системного анализа ФИЦ ИУ РАН

Россия, 117312, Москва, просп. 60-летия Октября, 9

E-mail: usbelka@mail.ru

Ключевые слова: динамические системы с управлением, задача терминального управления, метод накрытий, лиувиллевы системы.

Аннотация: Расширение фазового пространства динамической системы с управлением применяется для решения различных задач управления. В этой работе такой подход использован для решения задаич терминального управления для лиувиллевой системы. Предложенный ранее для плоских систем метод накрытий обобщается на случай лиувиллевых систем. Для демонстрации работоспособности метода взята математическая модель, описывающая движение маятника Капицы. Результаты численного моделирования демонстрируют эффективность предложенного подхода.

1. Введение

Известны различные подходы, требующие расширения фазового пространства системы для решения задач управления динамическими системами. Одним из таких подходов является метод, предлженный в работе [1]. В этой работе расширение фазового пространства используется для учета ограничений на управления. Исходные управления системы добавляются во множество фазовых переменных системы, а также строится новое управление системы без ограничений. При этом учет ограничений на фазовые переменные системы осуществляется с помощью специального расширения подхода, основанного на технике SDRE — state-dependent Riccati equations [3].

Еще один подход, требующий расширения фазового пространства системы, разработан для так называемых динамически линеаризуемых систем [2]. При линеаризации динамической обратной связью фазовое пространство дополняется переменными, называемыми динамической обратной связью. При этом фазовые траектории исходной системы переходят в фазовые траектории расширенной системы, а сама расширенная система при этом эквивалентна нормальной форме Бруновского.

Еще одним подходом, требующим расширение пространства состояний системы, является подход, основанный на понятии накрытия [6]. Он применяется для решения задач терминального управления и заключается в добавлении уравнений на производные управления и в построении специального отображения (накрытия) из расширенного фазового пространства дополненной системы в расширенное фазовое пространство новой системы. При этом любое решение новой системы должно удовлетворять всем начальным условиям исходной системы. Метод накрытий сводит решение задачи терминального управления к решению двух связанных задач Коши.

Было показано [5], что применение метода накрытий удобно в случае так называемых плоских [4] и лиувиллевых [7] систем. В данной работе мы продемонстрируем эффективность такого подхода для решения задачи терминального управления лиувиллевыми системами на примере математической модели маятника Капицы [4].

2. Метод накрытий для решения задач терминального управления

Рассмотрим динамическую систему с управлением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где t — независимая переменная, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — состояние, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — управление, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{U}$ — области их изменения, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — гладкая функция.

Задача терминального управления для системы (1) заключается в поиске такой зависимости $u(t)$ в классе допустимых управлений, при которой траектория системы переходит из начального состояния x_0, заданного в момент времени t_0, в конечное состояние x_f, заданного в момент времени t_f, за время $t_f - t_0$.

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{Y}$ — две системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Накрытием* из системы $\mathcal{E}$ в систему $\mathcal{Y}$ называют сюръективное отображение расширенного фазового пространства системы $\mathcal{E}$ в расширенное фазовое пространство $\mathcal{Y}$, при котором любая траектория системы $\mathcal{E}$ отображается в траекторию $\mathcal{Y}$, а прообраз любой траектории системы $\mathcal{Y}$ состоит из точек траекторий некоторой подсистемы $\mathcal{E}$.

Рассмотрим метод накрытий для решения задачи терминального управления для системы (1) с граничными условиями

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f. \tag{2}$$

Предположим, что мы нашли функции $U_i, \phi_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, переменных

$$t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(k_m-1)}, \quad k_1 + \ldots + k_m = n,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(A) Соотношения $p_j = \phi_j, j = \overline{1,n}$, определяют накрытие из системы

$$\dot{x}_j = f_j(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m), \qquad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$u_i^{(k_i)} = U_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(k_m-1)}), i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

в систему вида

$$\dot{p} = P(t, p), \quad p \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

(B) Заданные конечные значения $x(t_f)$ однозначно определяют значения $p_f = p(t_f)$ и наоборот, значения $p(t_f)$ однозначно определяют значения $x(t_f)$.

(C) Если p_0 — значение в точке t_0 решения $p(t)$ системы (5), удовлетворяющего условию $p(t_f) = p_f$, то система нелинейных уравнений

$$p_0 = \phi(t_0, x_{1,0}, \ldots, x_{n,0}, u_1(t_0), \ldots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \ldots, u_m^{(k_m-1)}(t_0)) \tag{6}$$

имеет решение относительно $u_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0)$.

В случае выполнения условий (A), (B), (C) задача (1), (2) может быть решена следующим образом.

1. Из конечных условий (2) вычисляем значения $p(t_f)$.
2. Находим решение $p(t)$ системы (5), удовлетворяющее условию $p(t_f) = p_f$.
3. Вычисляем $p(t_0)$.
4. Из системы (6) находим значения $u_1(t_0), \dot{u}_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0)$.
5. Решая задачу Коши для системы (3)–(4) с начальными значениями

$$t_0, x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, u_1(t_0), \dot{u}_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0),$$

находим решение $\big(x(t), u(t)\big)$ системы (1).

Систему вида (3)–(4), удовлетворяющую условиям (A), (B) и (C) для некоторых функций $\phi_j, j = \overline{1,n}$, будем называть *$r$–замыканием* задачи терминального управления (1), (2). r–Замыкание позволяет решать задачу.

3. Лиувиллевы системы

Системы с управлением, орбитально эквивалентные системам вида

$$x_i^{(k_i)} = f_i(t, y, \dots, y^{(s)}), \quad i = \overline{1,n}, \qquad y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{7}$$

называют *лиувиллевыми*. Множество решений лиувиллевой системы легко описать: множество решений системы (7) состоит из таких наборов функций $(x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_m(t))$, что функции $y_1(t), \dots, y_m(t)$ произвольны, а функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ находятся интегрированием правых частей системы (7). Переменные $y_1, \dots, y_m$ называют *лиувиллевыми*, их набор y — *лиувиллевым выходом*, а переменные $x_1, \dots, x_n$ — *интегральными*.

Пусть $k_i = 1$ для всех $i = \overline{1,n}$, $m = 1$ и для системы (7) такого вида поставлена задача терминального управления с граничными условиями

$$\begin{aligned} &x|_{t=t_0} = x_0, \qquad \tilde{y}|_{t=t_0} = \tilde{y}_0, \qquad x = (x_1, \dots, x_n),\\ &x|_{t=t_f} = x_f, \qquad \tilde{y}|_{t=t_f} = \tilde{y}_f, \qquad \tilde{y} = (y^{(0)}, \dots, y^{(L-1)}). \end{aligned} \tag{8}$$

Для уравнения $y^{(L)} = v$ с конечными условиями $\tilde{y}|_{t=t_f} = \tilde{y}_f$ строим r-замыкание

$$y^{(k)} = U(t, \overline{y}), \quad k = n + 2L, \qquad \overline{y} = (y^{(0)}, \dots, y^{(k-1)}) \tag{9}$$

с накрытием, заданным функциями $p_j = p_j(t, \overline{y}), \quad j = \overline{1,L}$.

В расширенном фазовом пространстве системы (9) рассмотрим векторное поле

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=0}^{k-2} y^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(l)}} + U(t, \overline{y}) \frac{\partial}{\partial y_j^{(k-1)}},$$

и функции $F_i(t, \overline{y}), i = \overline{1,n}$, определенные условиями $\overline{D}(F_i) = f_i$, $F_i|_{t=t_f} = 0$. Можно доказать, что уравнение (9) удовлетворяет условиям (A) и (B) определения r–замыкания граничной задачи для системы

$$\dot{x}_i = f_i(t, y, \dots, y^{(s)}), \quad i = \overline{1,n},$$

с граничными условиями (8), а функции $p_j, q_i = x_i - F_i, j = \overline{1,L}, i = \overline{1,n}$, определяют соответствующее накрытие. Таким образом можно построить r–замыкание для лиувиллевых систем.

4. Управление маятником Капицы

Рассмотрим маятник Капицы, движение которого описывает система

$$\dot{\alpha} = p + \frac{u}{l}\sin\alpha, \quad \dot{p} = (\frac{g}{l} - \frac{u^2}{l^2}\cos\alpha)\sin\alpha - \frac{u}{l}p\sin\alpha, \quad \dot{z} = u, \tag{10}$$

где z — вертикальная координата точки подвешивания, u — вертикальная скорость, p — параметр, пропорциональный обобщенному импульсу, α — угол между осью маятника и осью Oz, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения.

Считая α новой независимой переменной, t, p, z — переменными состояния, а u — управлением, переписываем систему (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\alpha} &= \frac{(gl - u^2\cos\alpha)\sin\alpha - lup\cos\alpha}{l(lp + u\sin\alpha)}, \\ \frac{dt}{d\alpha} &= \frac{l}{lp + u\sin\alpha}, \\ \frac{dz}{d\alpha} &= \frac{lu}{lp + u\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{11}$$

Система (11), а значит, и система (10) лиувиллева с одной лиувиллевой переменной p и интегральными переменными t, z.

В области, где $\alpha(t)$ и $t(\alpha)$ — строго монотонные функции, системы (10) и (11) эквивалентны. Рассмотрим случай, когда эти функции возрастающие. Функцию $u(\alpha)$ будем определять по функции $p(\alpha)$, решая первое уравнение системы (11) относительно u.

Рассмотрим задачу терминального управления для системы (10) с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\alpha\big|_{t=t_0} = \alpha_0, \quad p\big|_{t=t_0} = p_0, \quad z\big|_{t=t_0} = z_0, \\ &\alpha\big|_{t=t_f} = \alpha_f, \quad p\big|_{t=t_f} = p_f, \quad z\big|_{t=t_f} = z_f. \end{aligned} \tag{12}$$

Для решения задачи (10), (12) используем следующий алгоритм.

1. Находим функцию $p_*(\alpha)$, удовлетворяющую граничным условиям $p\big|_{t=t_0} = p_0$, $p\big|_{t=t_f} = p_f$, например,

$$p_*(\alpha) = \frac{p_f(\alpha - \alpha_0) + p_0(\alpha - \alpha_f)}{\alpha_f - \alpha_0}. \tag{13}$$

Функция $p_*(\alpha)$ должна удовлетворять всем граничным условиям и обеспечивать монотонность функции $\alpha(t)$.

2. Полагая

$$p(\alpha) = p_*(\alpha) + c_1(\alpha - \alpha_0)(\alpha_f - \alpha) + c_2(\alpha - \alpha_0)(\alpha_f - \alpha)^2,$$

решая первое уравнение системы (11) относительно u и проверяя условие возрастания функции $\alpha(t)$, находим c_1, c_2 из системы

$$z_f - z_0 = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_f} \frac{lud\alpha}{lp + u\sin\alpha}, \qquad t_f - t_0 = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_f} \frac{ld\alpha}{lp + u\sin\alpha}. \tag{14}$$

Если условие возрастания функции $\alpha(t)$ не выполнено, меняем функцию $p_*(\alpha)$.

3. Для найденных c_1, c_2 находим зависимость $u_*(\alpha)$.

4. Используя найденную функцию $u_*(\alpha)$, решаем задачу Коши для системы (10) с начальными условиями

$$\alpha\Big|_{t=t_0} = \alpha_0, \quad p\Big|_{t=t_0} = p_0, \quad z\Big|_{t=t_0} = z_0,$$

где значение $u_*(t)$ вычисляем на каждом шаге интегрирования по известному значению $\alpha(t)$.

Данный алгоритм был применен для решения терминального управления для системы (10) с параметром $l = 10$(см) и граничными данными

$$\begin{array}{llll} t_0 = 0(\text{с}), & \alpha_0 = 0, & p_0 = 1(1/\text{сек}), & z_0 = 3(\text{см}), \\ t_f = 3(\text{с}), & \alpha_f = 0.8, & p_f = 0.8(1/\text{сек}), & z_f = 0(\text{см}). \end{array}$$

Несложно убедиться, что при заданных граничных условиях для функции $p_*(\alpha)$, заданной соотношением (13), выполнены условия эквивалентности систем (10) и (11).

Графики переходных процессов показывают, что найденное таким образом управление решает поставленную терминальную задачу.

5. Заключение

В данной работе демонстрируется использование метода накрытий для решения задачи терминального управления для лиувиллевой системы на примере маятника Капицы. Показано, что соответствующая математическая модель задается лиувиллевой системой, построено r-замыкание и накрытие, которое позволяет решить поставленную задачу. Результаты численного моделирования демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-37-20032 мол_а_вед).

Список литературы

1. Cimen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equations // Annual Review in Control, 2010. Vol. 34. P. 32-51.
2. Charlet B., Levine J., Marino R. On dynamic feedback linearization // System & Control Letters, 1989. Vol. 13. P. 143-151.
3. Cloutier J.R., Cocburn J.C. The state-dependent nonlinear regular with state constraints // Proceedings of the American control conference, 2001. P. 390-395.
4. Fliess M., Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flatness and defect of nonlinear systems: introduction, theory and examples // International Journal of Control. 1995. Vol. 61, No. 6. P. 1327-1361.
5. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Метод накрытий для терминального управления и орбитальная декомпозиция систем // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 502-513.
6. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. Симметрии и законы сохранения математической физики / 2-е издание, испр. и доп. М.: Факториал, 2005, 474 с.
7. Четвериков В.Н. Лиувиллевы системы и симметрии // Дифференциальные уравнения, 2012. Т. 40, № 12. С. 1665-1674.