

УДК 514.17

ВЫПУКЛАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Л.В. Локуцкий

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8

E-mail: lion.lokut@gmail.com

Ключевые слова: выпуклая тригонометрия, двумерное управление, финслерова геометрия.

Аннотация: На докладе будет рассказано о новом удобном методе описания плоских выпуклых компактных множеств и их поляр, обобщающем классические тригонометрические функции \sin и \cos . По-видимому, этот метод может оказаться очень полезным для явного нахождения решений задач оптимального управления с двумерным управлением. С его помощью недавно удалось построить явные решения в серии задач с двумерным управлением, которые до этого не поддавались точному исследованию.

Пусть Ω – произвольное выпуклое компактное множество на плоскости \mathbb{R}^2 , содержащее начало координат во внутренней точке $0 \in \text{Int } \Omega$. Если в некоторой задаче оптимального управления двумерное управление лежит в Ω , то часто из принципа максимума Понтрягина следует, что оптимальное управление должно двигаться вдоль границы Ω . В случае, когда Ω – это круг, движение точки по окружности удобно описывать в терминах тригонометрических функций \cos и \sin . Однако, когда Ω отличается от круга, тригонометрические функции подходят плохо. Например, в случае, когда Ω – многоугольник, для явного построения оптимальной траектории часто приходится кропотливо рассматривать все возможные скачки управления с одной вершины на другую.

На докладе я расскажу о совершенно ином подходе, основанном на введении новых функций \cos_Ω и \sin_Ω , которые часто позволяют удобно описать динамику точки на границе Ω явно, просто и без громоздких формул. В случае, когда Ω – это единичный круг с центром в начале координат, функции \cos_Ω и \sin_Ω совпадают с классическими тригонометрическими функциями. В случае произвольного множества Ω они, во-первых, наследуют много удобных свойств классических функций \cos и \sin , а, во-вторых, могут быть явно найдены для очень большого числа конкретных множеств Ω . Оказывается, что свойства одной пары тригонометрических функций \cos и \sin , наследуются двумя парами обобщенных тригонометрических функций \cos_Ω , \sin_Ω и \cos_{Ω° , \sin_{Ω° (здесь Ω° – поляр Ω).

С помощью этой техники удалось найти явные решения в большой серии задач с двумерным управлением из Ω (см. [3]). Сформулирую некоторые из этих задач на языке оптимального управления: рассматриваются следующие задачи быстродей-

ствия,

$$T \rightarrow \min$$

при условии, что управление $u = (u_1, u_2)$ двумерно и лежит в Ω :

1. Финслерова геометрия на плоскости Лобачевского:

$$\dot{x} = yu_1; \quad \dot{y} = yu_2; \quad u \in \Omega$$

2. Задача управления яхтой (обобщенная машина Дуббинса)

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad u \in \Omega$$

Дополнительно в этой задаче мы ограничиваем скорость движения u вдоль границы Ω , запрещая, например, скачки управления.

3. Задача Грушина

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = x_1 u_2; \quad u \in \Omega.$$

4. Задача Дидоны с финслеровой длиной

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(x_1 u_2 - x_2 u_1); \quad u \in \Omega.$$

5. Задача Мартине

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{w} = -\frac{1}{2}x_2^2 u_1; \quad u \in \Omega.$$

6. На группе Энгеля

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(x_1 u_2 - x_2 u_1); \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2}x_2^2 u_1; \quad u \in \Omega. \end{aligned}$$

7. На группе Картана (обобщенная задача Дидоны)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(x_1 u_2 - x_2 u_1); \\ \dot{w}_1 &= \frac{1}{2}x_1^2 u_2; \quad \dot{w}_2 = -\frac{1}{2}x_2^2 u_1; \quad u \in \Omega. \end{aligned}$$

Во всех этих задачах удалось найти явные формулы для решений с помощью функций \cos_Ω и \sin_Ω . Также с помощью этих функций удалось получить явные формулы в обобщенной задаче об Эйлерах эластичах, в задаче Риза-Шеппа и в задаче о качении шара¹. Отмечу, что задача 4 была решена в 1947 г. для замкнутых кривых с помощью теоремы Брунна-Минковского и без использования принципа максимума

¹Часть из перечисленных задач решена совместно с Ю.Л. Сачковым и А.А. Ардентов.

Понтрягина, см. [1]. Позже она рассматривалась очень большим количеством авторов во множестве разных вариаций. Задачи 5,6 и 7 для одного частного случая, когда Ω – квадрат, были решены в 2017-2018 г., см. [2, 4].

Еще раз подчеркну, что для очень многих конкретных множеств Ω новые функции \cos_Ω и \sin_Ω могут быть легко выражены через элементарные (а, значит, и найденные через них явные решения всех перечисленных задач оптимального управления). Например, если Ω – это произвольный выпуклый многоугольник, то функции \cos_Ω и \sin_Ω оказываются кусочно-линейными и без труда находятся через координаты вершин. Другой пример Ω – эллипс (не обязательно центрированный в начале координат). В этом случае функции \cos_Ω и \sin_Ω выражаются через классические функции \cos и \sin . Еще один важный пример, когда граница множества Ω заданна численно. В этом случае функции \cos_Ω и \sin_Ω также без труда вычисляются численно.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 17-01-00805 и 17-01-00809.

Список литературы

1. Busemann H. The Isoperimetric Problem in the Minkowski Plane // American Journal of Mathematics. 1947. Vol. 69, No. 4, P. 863-871
2. Barilari D., Boscain U., Le Donne E., Sigalotti M. Sub-Finsler Structures from the Time-Optimal Control Viewpoint for some Nilpotent Distributions // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. Vol. 23, No. 3, P. 547-575.
3. Lokutsievskiy L.V. Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry // 2018. [arXiv:1807.08155](https://arxiv.org/abs/1807.08155)
4. A. Ardentov, E. Le Donne, Yu. Sachkov. Sub-Finsler geodesics on the Cartan group // 2018. [arXiv:1810.05431](https://arxiv.org/abs/1810.05431)