УДК 517.977

СУБФИНСЛЕРОВЫ ЗАДАЧИ НА ГРУППАХ КАРТАНА И ЭНГЕЛЯ

Ю.Л. Сачков

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

Россия, 152021, Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра Первого, д.4 «а»

E-mail: yusachkov@gmail.com

Ключевые слова: оптимальное управление, геометрическая теория управления, субфинслерова геометрия, группы Ли.

Аннотация: Левоинвариантные субфинслеровы ℓ_∞ задачи на группах Картана и Энгеля рассматриваются как задачи быстродействия с двумерным линейным управлением. Применяются геометрические методы оптимального управления. Описаны экстремальные траектории: анормальные, релейные, особые и смешанные. Исследована оптимальность этих траекторий.

1. Введение

Субфинслерова геометрия является естественным обобщением финслеровой геометрии, субримановой геометрии и, как следствие, римановой геометрии. Субфинслеровы структуры возникают в геометрической теории групп, в теории изометрически однородных геодезических пространств и в различных приложениях теории управления; см. [5, 7], [3, 4, 6] и [2] соответственно.

Группы Ли, снабженные субфинслеровой структурой, возникают в геометрической теории групп как асимптотические конусы нильпотентных конечно порожденных групп. А именно, в работе [5] Пансу установил, что ассимптотические конусы нильпотентных групп с конечным числом образующих, снабженные словарной метрикой, суть группы Карно, снабженные левоинвариантной субфинслеровой метрикой. Заметим, что такие метрики возникают из структур, отличных от субримановых, так как нормы описываются выпуклыми оболочками конечного числа точек. В этой связи ℓ_1 норма является классическим примером. Для групп ранга 2 эта норма отличается от ℓ_∞ просто заменой переменных.

Задачу поиска кратчайших кривых в субфинслеровых группах Ли можно переформулировать как задачу быстродействия для системы, линейной по управлениям. Формальное введение можно найти в работе [1]. В частности, существование оптимальных по быстродействию траекторий — классическое следствие теоремы Филиппова.

Цель настоящей работы — рассмотреть две конкретные нильпотентные группы Ли ранга 2 глубины 3 и охарактеризовать в них оптимальные кривые. Рассматриваются группа Картана и группа Энгеля. Группа Картана есть 5-мерная свободная нильпотентная группа Ли ранга 2 глубины 3. Группа Энгеля есть 4-мерная нильпотентная группа Ли ранга 2 глубины 3. Исследуются левоинвариантные ℓ_∞ субфинслеровы структуры ранга 2 на этих группах Ли.

Приводятся постановки и формулировки для случая группы Картана. Случай группы Энгеля рассматривается аналогично.

2. Постановка задачи. Существование решений

Рассмотрим 5-мерную свободную нильпотентную алгебру Ли $L = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_5)$ глубины 3 с двумя образующими. Ненулевые скобки в этой алгебре Ли имеют вид

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

Эта алгебра Ли называется алгеброй Картана. Далее, пусть M есть односвязная группа Ли с алгеброй Ли L; M называется группой Картана. Имеется следующая модель:

$$M = \mathbb{R}^5_{x,y,z,v,w},$$

с алгеброй Ли L, заданной левоинвариантными векторными полями на $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial w},\\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v},\\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial v} + y\frac{\partial}{\partial w},\\
X_4 &= \frac{\partial}{\partial v},\\
X_5 &= \frac{\partial}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Правило умножения в группе Картана M для этой модели приведено в работе [8].

Левоинвариантная ℓ_∞ субфинслерова задача на группе Картана ставится как следующая задача быстродействия:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M, \quad u \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_\infty \leqslant 1\}, \tag{1}$$
$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|),$$

$$q(0) = q_0 = \mathrm{Id} = (0, \dots, 0), \quad q(T) = q_1, \tag{2}$$

$$T \to \min. \tag{3}$$

Замечание 1. *Задача (1)–(3) геометрически формулируется как следующая задача в плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$.*

Пусть заданы точка $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, число $S \in \mathbb{R}$ и точка $c \in \mathbb{R}^2$. Точка (x_1, y_1) соединена с началом координат кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Нужно найти кривую $\gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, T]\}$ со скоростью $\|(\dot{x}(t), \dot{y}(t))\|_\infty \leqslant 1$, которая соединяет начало координат с точкой (x_1, y_1), ограничивает вместе с кривой γ_0 область с ориентированной площадью S и с центром масс в точке c, для которой время движения T минимально.

Теорема Рашевского-Чжоу [9] обеспечивает полную управляемость системы (1), а из теоремы Филиппова [9] следует существование оптимальных управлений в задаче быстродействия (1)–(3).

3. Принцип максимума Понтрягина

К задаче (1)–(3) применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП). Как обычно, экстремали задачи делятся на анормальные и нормальные.

Анормальные экстремальные управления постоянны. Оптимальные анормальные управления u характеризуются условием $\|u\|_\infty = 1$.

Нормальные экстремальные управления делятся на 3 класса:

1. релейные (кусочно-постоянные управления со значениями в вершинах квадрата U),
2. особые (постоянные управления со значениями внутри сторон квадрата U),
3. смешанные (состоящие из конечного числа релейных и особых дуг).

Особые управления оптимальны.

4. Релейный поток

Введем гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$, $i = 1, \dots, 5$. Для релейных экстремалей гамильтонова система принципа максимума Понтрягина есть система обыкновенных дифференциальных уравнений в 10-мерном пространстве (кокасательном расслоении группы Картана). В силу левоинвариантности задачи, эта система треугольна, т.е. подсистема для 5-ти сопряженных переменных не зависит от переменных состояния x, y, z, v, w:

$$\begin{cases} \dot h_1 = -s_2 h_3, \\ \dot h_2 = s_1 h_3, \\ \dot h_3 = s_1 h_4 + s_2 h_5, \\ \dot h_4 = \dot h_5 = 0, \\ \dot q = s_1 X_1 + s_2 X_2, \qquad s_i = \operatorname{sgn} h_i. \end{cases}$$

Далее, подсистема для сопряженных переменных имеет первые интегралы h_4, h_5 и $E = h_3^2/2 + h_1 h_5 - h_2 h_4$, поэтому редуцируется к системе ОДУ 2-го порядка. Исследован фазовый портрет этой редуцированной системы. Как следствие описан релейный фазовый поток, порождающий релейные траектории.

5. Оптимальность релейных и смешанных траекторий

Теорема 1. *Если релейная экстремаль удовлетворяет неравенству*

$$\min(-|h_4|, -|h_5|) < E \leqslant \max(-|h_4|, -|h_5|),$$

то она оптимальна.

С помощью необходимых условий оптимальности [1, 10] доказаны следующие оценки.

Теорема 2. *Если $E > \max(-|h_4|, -|h_5|)$, то оптимальные релейные траектории имеют не более* 11 *переключений.*

Теорема 3. *Оптимальные смешанные управления имеют не более* 13 *переключений.*

6. Заключение

В данной работе описаны экстремальные траектории в левоинвариантной l_∞ субфинслеровой задаче на группе Картана и получены оценки числа переключений на оптимальных траекториях. Ряд важных вопросов по этой задаче остается открытым:

- точное описание времени разреза и множества разреза,
- структура и регулярность субфинслеровой сферы.

Этим вопросам будут посвящены дальнейшие работы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Список литературы

1. Barilari D., Boscain U., Le Donne E., Sigalotti M. Sub-Finsler structures from the time-optimal control viewpoint for some nilpotent distributions // J. Dyn. Control Syst. 2017. Vol. 23, No. 3. P. 547-575.
2. Boscain U., Chambrion T., Charlot G. Nonisotropic 3-level quantum systems: complete solutions for minimum time and minimum energy // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2005. Vol. 5. No. 4. P. 957-990.
3. Берестовский В.Н. Однородные многообразия с внутренней метрикой. II // Сибирский математический журнал. 1989. Т. 30, № 2ю С. 14-28, 225.
4. Берестовский В.Н. О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой // Сибирский математический журнал. 1989. Т. 30, №. 1. С. 23-34.
5. Pansu P. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. Vol. 129, No. 1. P. 1-60.
6. Le Donne E. A metric characterization of Carnot groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. Vool. 143, No. 2. P. 845-849.
7. Breuillard E., Le Donne E. On the rate of convergence to the asymptotic cone for nilpotent groups and subFinsler geometry // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2013. Vol. 110, No. 48. P. 19220-19226.
8. Сачков Ю.Л., Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны // Мат. сборник. 2003. Т. 194, № 9. С. 63-90.
9. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
10. Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V. Symplectic geometry for optimal control // Nonlinear controllability and optimal control. Textbooks Pure Appl. Math. New York: Dekker, 1990. Vol. 133. P. 263-277.