УДК 514.174.2

О ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ КРАТНОГО ПОКРЫТИЯ ЗАМКНУТОГО МНОЖЕСТВА В ДВУМЕРНОМ НЕЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Лемперт
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134
E-mail: lempert@icc.ru

А.Л. Казаков
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134
E-mail: kazakov@icc.ru

Ключевые слова: k-кратное покрытие множества, оптико-геометрический подход, диаграмма Вороного, неевклидова метрика, вычислительный алгоритм, численный эксперимент.

Аннотация: Работа посвящена исследованию задачи построения оптимальных k-кратных покрытий (при фиксированном k) кругами замкнутого ограниченного множества в двумерном метрическом пространстве при заданном количестве кругов. Критерием оптимальности является минимизация радиуса. Подобные постановки появляются при создании глобальных навигационных систем, таких как GPS и ГЛОНАСС, аналогичная проблема возникает в инфраструктурной логистике, если необходимо в дополнение к существующей основной системе обслуживания создать дублирующую с тем, чтобы обеспечить бесперебойную работу в случае отказа одного или нескольких обслуживающих центров. Для решения данной задачи предложен вычислительный алгоритм, который основан на применении оптико-геометрического подхода, базирующегося на принципах Ферма и Гюйгенса, и диаграмме Вороного. Ключевой особенностью алгоритма является пригодность для работы как с евклидовой, так и с неевклидовыми метриками. Проведен численный эксперимент, выполнено обсуждение его результатов.

1. Введение

Задача о покрытии кругами является одной из классических NP-трудных задач. В общем виде она формулируется следующим образом: как расположить геометрические объекты в ограниченной области, чтобы данная область целиком лежала внутри объединения этих объектов. Обычно в литературе рассматривается задача о построении однократного покрытия, существует большое количество работ (см., например, [1–4]). Результаты решения задачи о покрытии кругами различных множеств доступны в сети Интернет, например, большой известностью в кругах специалистов пользуется веб-сайт Erich's Packing Center.

Данная задача, которая на первый взгляд может показаться сугубо теоретической, имеет многочисленные приложения. Примерами этого являются размещение вышек сотовой связи, спасательных станций, полицейских участков, банкоматов, больниц, школ (см., [5–7]), разработка систем мониторинга распределенных объектов с помощью беспроводных сенсорных сетей (см., [8, 9]) и т.д.

В задаче о построении k-кратного покрытия, которая рассматривается в настоящей работе, каждая точка в покрываемой области должна принадлежать не менее, чем k геометрическим объектам. Эта задача возникает при создании глобальных навигационных систем, таких как GPS и ГЛОНАСС, аналогичная проблема возникает в инфраструктурной логистике, если необходимо в дополнение к существующей основной системе обслуживания создать дублирующую, чтобы обеспечить бесперебойную работу в случае отказа одного или нескольких обслуживающих центров.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о многократном покрытии замкнутого ограниченного множества равными кругами в двумерном пространстве со специальной метрикой и приводим описание вычислительного алгоритма для ее решения. Алгоритм основан на комбинации оптико-геометрического подхода [10] и метода K-средних [11].

2. Постановка задачи

Пусть X – метрическое пространство, M – замкнутое односвязное множество. Введем следующую метрику:

$$\rho(a,b) = \min_{\Gamma \in G(a,b)} \int\limits_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x,y)}. \tag{1}$$

Здесь $G(a,b)$ – множество непрерывных кривых в X, соединяющих точки a и b, $f(x,y) > 0$ непрерывная функция, определяющая локальную скорость движения в точке $(x,y) \in X$.

Задачей построения k–кратного покрытия (k–CCP) называется задача о размещении n равных кругов $C_i(O_i, R)$, $i = \overline{1,n}, n > k$, так, чтобы M полностью лежало внутри объединения этих кругов, и каждая точка из M принадлежала не менее, чем k кругам. R и O_i – радиус и центр круга C_i соответственно. Таким образом, получаем следующую задачу:

$$R \to \min, \tag{2}$$

$$\max_{j \in J_k(s)} \rho(s, O_j) \leqslant R, \forall s \in M, \tag{3}$$

$$O_i \in M, i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Здесь $J_k(s)$ – множество, состоящее из k центров кругов, которые расположены ближе к точке s, чем остальные $n-k$.

Целевая функция (2) минимизирует радиус кругов, ограничения (3) и (4) обеспечивают принадлежность каждой точки множества M как минимум k кругам.

3. О методе решения

Понятие диаграммы Вороного k–го порядка было введено в работе [12]. Для набора из n точек $O_i, i=\overline{1,n}$, k–кратная область Вороного V_i^k с центром в точке O_i определяется следующим образом:

$$V_i^k = \left\{ s \in M : \rho(s, O_i) \leqslant \min_{j \in J_k} \rho(s, O_j) \right\}, i = \overline{1,n}, n > k.$$

Предлагаемый алгоритм состоит из следующих основных блоков: построение k–кратных областей Вороного V_i^k для случайно сгенерированного начального набора центров кругов; отыскание для каждой области V_i^k точки O_i^* – центра описанной окружности минимального радиуса; перестроение областей Вороного относительно набора найденных центров $O_i^*, i=1,...,n$.

Алгоритм

1. Введем прямоугольную сетку с шагом h. Далее будем работать с сеточной аппроксимацией M^h вместо M.

2. Методом случайной генерации задаем начальные координаты центров кругов $O_i \in M^h$, $i=\overline{1,n}$.

3. Из каждой точки $O_i, i=\overline{1,n}$ выпускаем световую волну, используя алгоритм из [10]. Это позволяет найти вектор $T(x,y) = (T_i(x,y))$, элементы которого содержат время достижения точки $(x,y) \in M^h$ соответствующей волной.

4. Находим k–кратные области Вороного $V_i^k, i=\overline{1,n}$. Для каждой точки (x,y) выбираем k минимальных компонент вектора $T(x,y)$. Таким образом, находим множества $J_k(s)$.

5. Определяем границу ∂V_i^k области V_i^k и аппроксимируем ее замкнутой ломаной с узлами в точках $V_u, u=\overline{1,m}$. Если при этом три точки оказываются лежащими на одной прямой, то средняя точка исключается из рассмотрения.

6. Из каждого узла $V_u, u=\overline{1,m}$, выпускаем световую волну, как и на шаге 3.

7. Для каждой точки $s(x,y) \in V_i^k$ маркируем волну, которая первой достигла $s(x,y)$, и фиксируем время $t(x,y)$, которое для этого потребовалось. Радиус и центр описанной окружности вычисляются по формулам

$$R_i = \max_{(x,y) \in V_i^k} t(x,y),$$

$$O_i^* = \arg\max_{(x,y) \in V_i^k} t(x,y).$$

Шаги 5–7 выполняются независимо для каждой области V_i^k.

8. Чтобы гарантировать полное покрытие кругами множество M^h, в качестве радиуса покрытия выберем максимальный: $R = \max\limits_{i=\overline{1,n}} R_i$.

9. Если $\rho(O_i, O_i^*), i=\overline{1,n}$ меньше, чем наперед заданная величина ε, переходим к шагу 10, иначе $O_i := O_i^*$, и переходим к шагу 3.

10. Если найденный на текущей итерации радиус меньше предыдущего, он сохраняется в качестве решения задачи. Производится новая генерация начальных положений. Завершение работы алгоритма осуществляется при достижении заданного количества генераций.

Световая волна здесь означает электромагнитную волну, скорость распространения которой в вакууме постоянна. Она распространяется в соответствии с физическими принципами Ферма и Гюйгенса. Согласно первому, из одной точки в другую свет движется по траектории, требующей минимальное время на перемещение. Второй принцип гласит, что все точки светового фронта волны становятся вторичными источниками световых волн, которые распространяются во всех направлениях. Алгоритм, описывающий распространение волны, более подробно представлен в [10,13].

Недостатком алгоритма, предложенного в данной статье, является то, что он не гарантирует получения глобального решения. Эта особенность унаследована от чувствительности диаграммы Вороного к выбору начального приближения. Мы используем многократное генерирование начальных положений покрывающих кругов, чтобы увеличить вероятность нахождения глобального решения.

Алгоритм был реализован в виде компьютерной программы, с помощью которой проведены тестовые численные расчеты, показавшие, что он чувствителен к выбору шага сетки и начальной генерации центров покрывающих кругов. Тем не менее, можно отметить применимость предлагаемого подхода к решению задачи о построения кратных покрытий как в случае евклидовой метрики, так и для неевклидовой, когда расстояние между точками определяется временем перемещения между ними.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-07-00604).

Список литературы

1. Conway J.H., Sloane N.J.A. Sphere Packing. Lattices and Groups. New York: Springer, 1999. 706 p.
2. Heppes A., Melissen, J.B.M. Covering a rectangle with equal circles // Periodica Mathematica Hungarica. 1997. Vol. 34. P. 65–81.
3. Tarnai T., Gaspar Zs. Covering a square by equal circles // Elem. Math. 1995. Vol. 50. P. 167-170.
4. Stoyan Y.G., Patsuk, V.M. Covering a compact polygonal set by identical circles // Comput. Optim. Appl. 2010. Vol.46. P. 75-92.
5. Drezner Z. Facility location: A survey of applications and methods. New York: Springer, 1995. 571 p.
6. Bánhelyi B., Palatinus E., Lévai, B.L. Optimal circle covering problems and their applications // Central European J. Operations Research. 2015. Vol. 23. P. 815-832.
7. Lempert A.A., Kazakov, A.L. On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure // Int. J. Artificial Intelligence. 2015. Vol. 13, No. 1. P. 200-210.
8. Tabirca T., Yang L.T., Tabirca S. Smallest number of sensors for k-covering // Int. J. Comput. Commun. Control. 2013. Vol. 8, No. 2. P. 312-319.
9. Cardei M., Wu J., Lu M. Improving netwotk lifetime using sensors with ad-justible sensing ranges // Int. J. Sensor Networks. 2006. Vol. 1, No. 1-2. P. 41-49.
10. Kazakov A.L., Lempert A.A. An approach to optimization in transport logistics // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72. P. 50-57.
11. Jain A.K., Dubes R.C. Algorithms for clustering data. New Jersy: Prentice Hall, 1988. 320 p.
12. Toth G.F. Multiple Packing and Covering of the Plane with Circles // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976. Vol. 27. P. 135-140.

13. Kazakov A., Lempert A., and Lebedev P.). Congruent circles packing and covering problems for multiconnected domains with non-euclidean metric, and their applications to logistics // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1839. P. 334–343.