

УДК 62.534(031)

О СТАБИЛИЗАЦИИ В ЦЕЛОМ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С.П. Безгласный

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru

Ключевые слова: глобальная стабилизация, программные движения, твердое тело, обратная связь, функция Ляпунова.

Аннотация: Решена задача о построении асимптотически устойчивых в целом произвольно заданных программных движений относительно центра масс твердого тела. Решение проведено построением внешнего программного управления и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Управление синтезировано в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными.

1. Введение

Научный интерес к одной из самых знаменитых проблем механики – задаче об управлении движением твердого тела относительно неподвижной точки – определяется ее практическим значением для динамики вращательного движения космических аппаратов и прикладной теории гироскопов. Задачи о стабилизации заданных программных движений твердого тела решались разными методами авторами в многочисленных работах. В частности, метод декомпозиции при управлении твердым телом использовался учеными в монографиях [1, 2]. В [3] рассмотрены натуральные лагранжевые системы, моделируемые механизмами с кинематической структурой дерева и использовано неявное задание функции Ляпунова. Экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами посвящена работа [4]. С помощью метода предельных функций решены задачи о стабилизации нестационарных движений механических систем в нелинейной постановке [5, 6], задача о стабилизации с гарантированной оценкой качества [7], о стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей [8], о трехосной ориентации гиростата с переменными моментами инерции [9], о стабилизации программных движений твердого тела с полостью с жидкостью большой вязкости [10] и другие.

Ниже ставится и решается задача об определении управляющих моментов, реализующих и стабилизирующих в целом произвольные заданные программные движения твердого тела относительно центра масс. Решение проводится построением активного управления, приложенного к телу и представляющего собой совокупность программно-управления и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова классической теории устой-

чивости. Метод предельных функций и предельных систем [11], предлагающий современные модификации теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости, позволяет расширить выбор использованных функций Ляпунова за счет функций со знакопостоянными производными и делает возможным строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

2. Постановка задачи

Рассматривается пространственное движение динамически несимметричного твердого тела относительно общего центра масс O . Вводятся следующие системы координат: $O'\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат; $OXYZ$ – подвижная Кениговая система координат; $Oxuz$ – система координат, жестко связанная с телом. Положение несущего тела относительно системы $OXYZ$ будет характеризоваться углами Эйлера φ, θ, ψ , они же принимаются за компоненты вектора обобщенных координат $\mathbf{q} = (\psi, \theta, \varphi)^T$, где символ $()^T$ обозначает транспонирование. Главные моменты инерции тела, вычисленные в связанной системе координат, обозначаются A, B, C . Предполагается, что значения этих моментов инерции рассматриваемой системы не зависят от времени.

Ниже будут исследоваться сферические движения тела относительно центра масс. Ставится задача о реализации управляющими силами, прикладываемыми к телу, произвольно заданных (программных) движений тела и стабилизации в целом этих движений.

Программным (желаемым) движением будет называться пара $(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t))$, где $\mathbf{q}^*(t)$ – ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функция размерности $n = 3$, описывающая некоторое заданное вращательное движение тела относительно центра масс. В общем случае функция $\mathbf{q}^*(t)$, задающая программное движение, может не являться решением системы дифференциальных уравнений, описывающих движения управляемой механической системы. Поэтому в дальнейшем будут реализовываться программные движения, разделяя управляющие воздействия на две группы: силы, реализующие программное движение, и силы, стабилизирующие его.

3. Вывод уравнений движения

Запишем уравнения движения тела в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\psi} \left((A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \right) + 0,5 \ddot{\theta} (A - B) \sin \theta \sin 2\varphi + \\ + \ddot{\varphi} C \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin 2\theta (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi - C) + \dot{\psi} \dot{\varphi} (A - B) \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \\ + 0,5 \dot{\theta}^2 (A - B) \cos \theta \sin 2\varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta ((A - B) \cos 2\varphi - C) = Q_{\psi}^c, \\ 0,5 \ddot{\psi} (A - B) \sin \theta \sin 2\varphi + \ddot{\theta} (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) + \dot{\psi} \dot{\varphi} (A - B) \sin \theta \cos 2\varphi + \\ + (\dot{\theta} \dot{\varphi} + 0,5 \dot{\psi} \dot{\theta}) (B - A) \sin 2\varphi + 0,5 \dot{\psi}^2 (C - A) \sin 2\theta + C \sin \theta \dot{\psi} \dot{\varphi} = Q_{\theta}^c, \\ \ddot{\psi} C \cos \theta + \ddot{\varphi} C - \dot{\theta} \dot{\psi} C \sin \theta + 0,5 \dot{\psi}^2 (B - A) \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \\ + 0,5 \dot{\theta}^2 (A - B) \sin 2\varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} (B - A) \sin \theta \cos 2\varphi = Q_{\varphi}^c. \end{array} \right.$$

Кинетическая энергия тела запишется в виде

$$2T = \left\{ A(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + B(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right\}$$

и представима $2T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, где $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ – симметричная матрица с элементами:

$$a_{11} = \sin^2 \theta (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) + C \cos^2 \theta,$$

$$a_{12} = a_{21} = \sin \theta (A - B) \cos \varphi \sin \varphi, \quad a_{13} = a_{31} = C \cos \theta,$$

$$a_{22} = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi, \quad a_{23} = a_{32} = 0, \quad a_{33} = C.$$

Уравнения (1) запишем в векторно-матричной форме:

$$(2) \quad \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^c,$$

где через $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ обозначен вектор-столбец с компонентами:

$$(3) \quad \Lambda_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (i = \overline{1,3}).$$

Считается, что вектор управляющих воздействий $\mathbf{Q}^c = (Q_\psi^c, Q_\theta^c, Q_\varphi^c)^T$, определяемых в дальнейшем, является совокупностью программных $\mathbf{Q}^p = (Q_\psi^p, Q_\theta^p, Q_\varphi^p)^T$ и стабилизирующих $\mathbf{Q}^s = (Q_\psi^s, Q_\theta^s, Q_\varphi^s)^T$ обобщенных сил: $\mathbf{Q}^c = \mathbf{Q}^p + \mathbf{Q}^s$.

4. Программное и стабилизирующее управления

Предположим, что тело должно совершать некоторое программное движение $\mathbf{r}(t) = (\psi^*(t), \theta^*(t), \varphi^*(t))^T$, где $\psi^*(t)$, $\theta^*(t)$, $\varphi^*(t)$ – заданные функции времени, описывающие заданное сферическое движение тела относительно его центра масс. Прямой подстановкой программного движения $\mathbf{r}(t) = (\psi^*(t), \theta^*(t), \varphi^*(t))^T$ в систему (2) определяются управляющие силы, реализующие это движение:

$$(4) \quad \mathbf{Q}^p = \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)).$$

Компоненты вектора \mathbf{Q}^p вычисляются по формулам (4), (3). В частности,

$$Q_\varphi^p = \ddot{\psi}^* C \cos \theta^* + \ddot{\varphi}^* C - \dot{\theta}^* \dot{\psi}^* C \sin \theta^* + 0,5 (\dot{\psi}^*)^2 (B - A) \sin^2 \theta^* \sin 2\varphi^* + \\ + 0,5 (\dot{\theta}^*)^2 (A - B) \sin \varphi^* + \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* \sin \theta^* ((B - A) \cos 2\varphi^* - C),$$

Выражения для компонент Q_ψ^p и Q_θ^p опущены в силу их громоздкости.

Добавлением обобщенных сил (4) в уравнения (2) записываются уравнения движений управляемой системы, для которой программное движение $\mathbf{r}(t)$ является решением, но, вообще говоря, не является устойчивым в смысле устойчивости по Ляпунову. Возникает задача его глобальной стабилизации, состоящая в определении активных сил $\mathbf{Q}^s = (Q_\psi^s, Q_\theta^s, Q_\varphi^s)^T$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость в целом исследуемого движения. Вводятся новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{r}(t) = (\psi - \psi^*(t), \theta - \theta^*(t), \varphi - \varphi^*(t))^T = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится, и уравнения возмущенного движения примут вид:

$$(5) \quad \mathbf{A} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}' + \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda}'' = \mathbf{Q}^p + \mathbf{Q}^s,$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{x})$, через $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}'$ и $\mathbf{\Lambda}''$ обозначены соответственно квадратичная, линейная и нулевая по скоростям отклонений векторные формы с компонентами:

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j, \quad i = \overline{1,3} \\ \Lambda'_i &= \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j, \quad i = \overline{1,3} \\ \Lambda''_i &= \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j, \quad i = \overline{1,3}.\end{aligned}$$

Или в явном виде:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \sin(2\theta^* + 2x_2) \left(A \sin^2(\varphi^* + x_3) + B \cos^2(\varphi^* + x_3) - C \right) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \\ &+ (A - B) \sin^2(\theta^* + x_2) \sin(2\varphi^* + 2x_3) \dot{x}_1 \dot{x}_3 + 0.5(A - B) \cos(\theta^* + x_2) \times \\ &\times \sin(2\varphi^* + 2x_3) \dot{x}_2^2 + \sin(\theta^* + x_2) \left((A - B) \cos(2\varphi^* + 2x_3) - C \right) \dot{x}_2 \dot{x}_3; \\ \Lambda'_1 &= \sin(2\theta^* + 2x_2) \left(A \sin^2(\varphi^* + x_3) + B \cos^2(\varphi^* + x_3) - C \right) (\dot{x}_1 \dot{\theta}^* + \dot{x}_2 \dot{\psi}^*) + \\ &+ (A - B) \sin^2(\theta^* + x_2) \sin(2\varphi^* + 2x_3) (\dot{\varphi}^* \dot{x}_1 + \dot{x}_3 \dot{\psi}^*) + \\ &+ (A - B) \cos(\theta^* + x_2) \sin(2\varphi^* + 2x_3) \dot{\theta}^* \dot{x}_2 + \\ &+ \sin(\theta^* + x_2) \left((A - B) \cos(2\varphi^* + 2x_3) - C \right) (\dot{\varphi}^* \dot{x}_2 + \dot{x}_3 \dot{\theta}^*); \\ \Lambda''_1 &= \sin(2\theta^* + 2x_2) \left(A \sin^2(\varphi^* + x_3) + B \cos^2(\varphi^* + x_3) - C \right) \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* + \\ &+ (A - B) \sin^2(\theta^* + x_2) \sin(2\varphi^* + 2x_3) \dot{\psi}^* \dot{\varphi}^* + 0.5(A - B) \cos(\theta^* + x_2) \times \\ &\times \sin(2\varphi^* + 2x_3) \dot{\theta}^{*2} + \sin(\theta^* + x_2) \left((A - B) \cos(2\varphi^* + 2x_3) - C \right) \dot{\theta}^* \dot{\varphi}^*.\end{aligned}$$

Выражения для компонент Λ_2 , Λ_3 , Λ'_2 , Λ'_3 , Λ''_2 и Λ''_3 выписываются аналогично.

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$(6) \quad 2V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}},$$

где \mathbf{C} – ограниченная постоянная симметричная матрица. Производная по времени функции (6) в силу системы (5) записывается равенством

$$(7) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{r}} \right) \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^T \left(-\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}' - \mathbf{A} \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{\Lambda}'' + \frac{1}{2} \mathbf{N} + \mathbf{Q}^p + \mathbf{Q}^s \right),$$

где символом \mathbf{N} обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j, \quad i = \overline{1,3}.$$

Зададим стабилизирующее управление равенством:

$$(8) \quad \mathbf{Q}^s = -\mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}' - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{r}} \right) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}'' + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} \mathbf{N} - \mathbf{Q}^p,$$

где постоянная матрица \mathbf{D} является ограниченной, и выбирается согласно неравенству $d_0 \mathbf{E} \leq \mathbf{D} \leq d_1 \mathbf{E}$, ($0 < d_0 < d_1 - \text{const}$), \mathbf{E} – единичная матрица. Слагаемое

$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{r}} \right) \dot{\mathbf{x}}$ есть вектор-столбец с компонентами $-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j$, $i = \overline{1,3}$. Тогда производная функции Ляпунова (7) имеет вид:

$$(9) \quad \frac{dV}{dt} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} \leq -d_0 \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 \leq 0.$$

Функция (9) является отрицательно определенной функцией по скоростям. Обоснование асимптотической устойчивости программного движения проводится с помощью

теоремы из работы [11], развивающей метод функций Ляпунова и позволяющей использовать функции Ляпунова не со знакоопределенной, а со знакопостоянной производной. Предполагается, что множество $\{\dot{\mathbf{x}} = 0\}$ не содержит решений предельной в смысле [11] к системе (5) с управлением (8) системы, кроме нулевого решения $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = 0$. Кроме того, функция Ляпунова (6) является бесконечно большой функцией своих аргументов. Таким образом имеет место асимптотическая устойчивость в целом исследуемого программного движения $\mathbf{r}(t) = (\psi^*(t), \theta^*(t), \varphi^*(t))^T$.

5. Заключение

В работе решена задача о синтезе асимптотически устойчивых в целом сферических программных движений твердого тела относительно его центра масс. Получено множество управлений, стабилизирующих многообразие произвольно заданных программных движений тела. Управление было построено аналитически в явном виде в классе непрерывных функций. Исследуемая задача решалась на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянной производной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00791а).

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 328 с.
2. Матюхин В.И. Универсальные законы управления механическими системами. М.: МАКС Пресс, 2001. 249 с.
3. Каюмов О.Р. Глобально управляемые механические системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 168 с.
4. Косов А.А. Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, Вып. 3. С. 411-426.
5. Андреев А.С., Бойкова Т.А. Об устойчивости неустановившегося движения механической системы // ПММ. 2004. Т. 68, Вып. 4. С. 678-686.
6. Перегудова О.А. О стабилизации движений неавтономных механических систем // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, Вып. 2. С. 176-188.
7. Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, Вып.1. С.44-51.
8. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, Вып. 2. С. 137-153.
9. Безгласный С.П. Активная ориентация гиростата с переменными моментами инерции // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, Вып.6. С. 766-777.
10. Bezglasnyi S.P. Stabilizing the programmed motion of a rigid body with a cavity filled with viscous fluid // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. Vol. 56, No. 5. P. 749-758.
11. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, Вып. 2. С. 225-232.