УДК 62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ ВДОЛЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Н.Н. Болотник
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, проспект Вернадского, 101, к. 1
E-mail: bolotnik@ipmnet.ru

Т.Ю. Фигурина
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, проспект Вернадского, 101, к. 1
E-mail: t_figurina@mail.ru

Ключевые слова: локомоционные системы, сухое трение, оптимальное управление.

Аннотация: Решается задача оптимального управления перемещением локомоционной системы, состоящей из двух тел, вдоль прямой на горизонтальной шероховатой плоскости. Между каждым из тел системы и плоскостью действует кулоново сухое трение. Управление осуществляется силой взаимодействия между телами. Требуется переместить систему из начального состояния покоя на заданное расстояние за минимальное время при условии, что относительные положения тел в начальный и конечный моменты времени совпадают, а скорости тел в конечный момент времени обращаются в нуль. Основное внимание уделяется безреверсному движению, при котором ни одному из тел не разрешается изменять направления своего движения.

1. Введение

Работа посвящена проблемам управления локомоционными системами, выполненными в виде цепочек твердых тел, расстояния между которыми могут изменяться. Тела взаимодействуют как между собой, так и с внешней средой, оказывающей сопротивление движению. За счет изменения своей конфигурации (относительного положения составляющих тел) подобные системы могут перемещаться в сопротивляющихся средах посредством ползания, подобно червям. Динамика такого перемещения детально исследована, например, в монографиях [1, 2], где законы изменения расстояний между телами или сил их взаимодействия предполагались заданными. Задача управления системами данного типа и оптимизации их движений была впервые поставлена в [3] для системы из двух тел; был предложен алгоритм управления и оптимизирован по параметрам. Проблемы управления передвижением цепочек тел в различных средах рассматривались также в [4,5]. В [6] поставлена и решена задача оптимального управления движением цепочки трех или более одинаковых тел вдоль прямой по горизонтальной плоскости с сухим трением. Построен закон изменения сил взаимодействия между телами, обеспечивающий перемещение цепочки за заданное время на максимальное расстояние при условии, что в начальный и конечный моменты времени скорости всех тел системы нулевые, а конфигурации (взаимные расположения тел) совпадают. Построенное оптимальное движение – безреверсное: тела системы не изменяют направления своего движения в течение процесса управления. Безреверсные движения обладают важным преимуществом: они минимизируют затраты энергии на компенсацию работы сил сухого трения в расчете на единицу пути. Методика построения оптимального управления, предложенная в [6], оказалась неприменимой для системы из двух тел. В настоящей статье представлено полное решение задачи оптимального по быстродействию управления перемещением системы двух тел на заданное расстояние вдоль прямой с сухим трением. Управление осуществляется силой взаимодействия между телами, на которую не налагается никаких ограничений. В начальный и конечный моменты времени система имеет одну и ту же конфигурацию и покоится. Эта задача двойственна задаче о перемещении системы на максимальное расстояние за фиксированное время. Особое внимание уделяется оптимальному управлению безреверсным движением, которое, как показано в [7], для системы двух тел возможно не всегда.

2. Модель системы и постановка задач управления

Локомоционная система состоит из двух тел массами m_1 и m_2, которые могут перемещаться вдоль одной прямой на горизонтальной плоскости. Между телами системы и плоскостью перемещения действует сухое кулоново трение. Система управляется изменением силы взаимодействия между телами. Тела, составляющие систему, моделируются материальными точками. Обозначим: x_1 и x_2 – координаты тел m_1 и m_2, отсчитываемые от неподвижных точек вдоль прямой, по которой движется система; k_1 и k_2 – коэффициенты трения между соответствующими телами и плоскостью; F – управляющая сила, приложенная телом m_2 к телу m_1; g – ускорение силы тяжести. Движение системы подчиняется уравнениям

$$\begin{gathered} m_i\ddot{x}_i = (-1)^{i+1}F + F_i, \\ F_i = -k_i m_i g \operatorname{sign} \dot{x}_i,\ \dot{x}_i \neq 0, \quad |F_i| \leqslant k_i m_i g,\ \dot{x}_i = 0, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{1}$$

Рассмотрим две задачи оптимального управления.

Задача 1. *Пусть в момент времени* $t = 0$ *система находится в состоянии покоя*

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \tag{2}$$

Требуется найти управляющую функцию $F(t)$*, которая приводит систему за минимальное время в состояние*

$$x_1(T) = a, \quad x_2(T) = a, \quad \dot{x}_1(T) = 0, \quad \dot{x}_2(T) = 0, \quad a > 0. \tag{3}$$

В этой задаче ищется оптимальное по быстродействию движение системы на заданное расстояние a при условии, что в начальный и терминальный моменты времени система покоится, а относительные положения составляющих ее тел совпадают. Без ограничения общности здесь полагается, что $a > 0$ и координаты тел в начальный (и соответственно в конечный) момент времени совпадают. Этого всегда можно добиться выбором соответствующей ориентации координатной оси и сдвигом начала отсчета координаты одного из тел на нужное расстояние.

Задача 2. *Найти управляющую функцию $F(t)$, которая обеспечивает приведение системы из состояния (2) в состояние (3) за минимальное время T, при условии, что ни одно их тел не изменяет направления своего движения, то есть*

$$\dot{x}_1(t) \geqslant 0, \quad \dot{x}_2(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Движение, удовлетворяющее неравенствам (4) назовем безреверсным движением. Безреверсное движение минимизирует затраты энергии на компенсацию работы сил трения.

Предполагается, что $k_1 m_1 \neq k_2 m_2$; в противном случае центр масс первоначально покоящейся системы не сможет сместиться из своего начального положения. Для определенности принимается $k_1 m_1 > k_2 m_2$.

3. Оценка снизу для времени движения

Для времени движения из состояния (2) в состояние (3) выполнено неравенство

$$T \geqslant T_0, \quad T_0 = 2\sqrt{\frac{a(1+\mu)}{k_1 g(1-k^2\mu^2)}}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}, \qquad k\mu < 1. \tag{5}$$

Доказательство этого неравенства основывается на задаче оптимального управления для центра масс рассматриваемой системы. Движение центра масс подчиняется уравнению $(m_1+m_2)\ddot{X} = F_1 + F_2$, где X – координата центра масс локомоционной системы. Если центр масс системы не изменяет направления своего движения, то есть выполнено неравенство $\dot{X} \geqslant 0$, то сумма сил трения, действующих не тела системы ограничена неравенствами $-(k_1 m_1 + k_2 m_2)g \leqslant F_1 + F_2 \leqslant (k_1 m_1 - k_2 m_2)g$. При таких ограничениях T_0 есть минимально возможное время для перемещения центра масс системы на расстояние a при условии. что в начальный и терминальный моменты времени скорость центра масс равна нулю. Отдельно доказывается, что оптимальное движение не содержит интервалов времени, на которых $\dot{X} < 0$.

4. Решение задачи 1

В отсутствие ограничений на управляющую функцию $F(t)$ и на движение тел система может быть приведена из состояния (2) в состояние (3) за минимальное время T_0. Оптимальное управления определяется неединственным образом, возможны разные стратегии управления. Один из возможных оптимальных законов управления приводится ниже. На интервале $[0, \tau)$, где

$$\tau = \frac{T_0}{2}(1 + k\mu), \tag{6}$$

управляющая сила задается равенством $F = -k_1 m_1 g$. При таком управлении тело m_1 неподвижно, а тело m_2 движется с максимальным ускорением, возможным при покоящемся теле m_1; центр масс системы при этом движется вперед ($\dot{X} > 0$) с максимально возможным ускорением $k_1 g(1 - k\mu)/(1 + \mu)$. В момент времени τ тело m_2 мгновенно останавливается в положении $x_2(\tau) = a(1 + k\mu)(1 + \mu)/(2\mu)$ и передает свой импульс целиком телу m_1. На интервале (τ, T_0) управляющая сила задается равенством $F = k_2 m_2 g$. При таком управлении тело m_2 неподвижно, а тело m_1 тормозится с ускорением, максимально возможным по модулю при покоящемся теле m_2. В момент времени T_0 тело m_1 приходит с нулевой скоростью в положение $x_1(T_0) = a(1 + \mu)(1 - k\mu)/2$, при этом координата центра масс равна a, но координаты тел в общем случае не совпадают. Для приведения обоих тел в положение с координатой a в момент времени T_0 применяется импульсное управление $F(t) = k_1 m_1 g[k\mu(1+\mu) + 1 - \mu]/2\dot{\delta}(t - T_0)$, где $\delta(t - T_0)$ – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $t = T_0$. Это управление мгновенно совмещает тела, не изменяя положения центра масс системы.

5. Решение задачи 2

Безреверсное движение рассматриваемой локомоционной системы из состояния (2) в состояние (3) невозможно, если $\mu < 1$ [7]. В дальнейшем предполагается, что $\mu \geqslant 1$. Если

$$\mu \geqslant \frac{1 + k\mu}{1 - k\mu}, \tag{7}$$

то искомое безреверсное движение может быть осуществлено за время T_0 для любого a. Оптимальный закон управления может быть определен следующим образом. На интервале $[0, \tau)$, где τ определено выражением (6), оба тела движутся так же, как и при оптимальном движении, описанном в предыдущем разделе. В момент времени τ тело m_2 останавливается и передает свой импульс целиком телу m_1. На интервале (τ, θ) управляющая сила задается равенством $F = -m_2 k_2 g$ и тело m_1 тормозится с ускорением, максимально возможным по модулю при покоящемся теле m_2. В момент времени θ координаты тел m_1 и m_2 совпадают, и в этот момент тело m_2 передает часть своего импульса телу m_1 так, чтобы скорости обоих тел сделались равными. На интервале времени $(\theta, T_0]$ оба тела тормозятся с одинаковым ускорением $-k_1 g(1 + k\mu)/(1 + \mu)$. Управляющая сила на интервале $(\theta, T_0]$ задается равенством $F = k_1 m_1 g(\mu - k\mu)/(1 + \mu)$. Представленная стратегия управления не является единственно возможной.

Если

$$1 < \mu < \frac{1 + k\mu}{1 - k\mu}, \tag{8}$$

то минимальное время движения системы между состояниями (2) и (3) определяется выражением

$$T = T_0 \frac{\sqrt{2\mu(1 + k\mu)} - \sqrt{k\mu(\mu - 1)}}{\sqrt{1 + \mu}}, \quad T > T_0. \tag{9}$$

Соответствующее оптимальное движение происходит следующим образом. На интервале времени $[0, \tau_1)$ тело m_1 неподвижно, а m_2 движется с ускорением, максимально возможным при покоящемся теле m_1, до тех пор, пока не выполнится равенство $x_2(\tau_1) = a$. В момент времени τ_1 тело m_2 останавливается и передает свой импульс целиком телу m_1. На интервале $[\tau_1, T)$ управляющая сила определяется равенством $F(t) = -k_2 m_2 g \mathrm{sign}(t - \theta)$. При таком управлении тело m_2 неподвижно, а тело m_1 тормозится с минимально допустимым по модулю ускорением на интервале $[\tau_1, \theta)$ и с максимально допустимым по модулю ускорением на интервале $[\theta, T)$. Моменты времени θ и T однозначно находятся из терминальных условий (2) и (3).

6. Заключение

Показано, что поставленная задача оптимального управления системой двух тел имеет решение в классе обобщенных функций, если силы трения скольжения, приложенные к телам различны. Оптимальное управление и соответствующее оптимальное движение системы определяются неединственно. В явном виде представлено одно из возможных решений. В общем случае оптимальное движение не безреверсно. Если масса тела, характеризующегося большей силой трения скольжения о поверхность перемещения, больше массы другого тела, то при любом движении системы, удовлетворяющем наложенным краевым условиям, хотя бы одно из тел будет изменять направление своей скорости. В противном случае возможно безреверсное движение. В явном виде оптимальное управление безреверсным движением для всех случаев, когда такое движение допустимо. Найдена область параметров (масс тел и коэффициентов трения), при которых приведение системы в заданное состояние за минимально возможное время T_0 можно реализовать безреверсным движением.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00652а) и Программы РАН I-29 - Актуальные проблемы робототехнических систем.

Список литературы

1. Zimmermann K., Zeidis I., Behn C. Mechanics of Terrestrial Locomotion with a Focus on Nonpedal Motion Systems. Heidelberg: Springer, 2010.
2. Steigenberger J., Behn C. Worm-like Locomotion Systems: an Intermediate Theoretical Approach. Munich: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2012.
3. Черноусько Ф.Л. Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66, Вып. 1. С. 3-9.
4. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двухмассовой системы // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, Вып. 5. С. 707-717.
5. Черноусько Ф.Л. Поступательное движение цепочки тел в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, Вып. 4. С. 380-388.
6. Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление системы материальных точек на прямой с сухим трением // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. 5. С. 3-9.
7. Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю. О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 138-148.