УДК 681.5.032

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НА КОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ С НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

И.Р. Белов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: ivanb1993@mail.ru

А.В. Юрченков
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2–я Бауманская ул., 5, стр. 1
E-mail: yurchenkov@ipu.ru

Ключевые слова: анизотропийная теория, анизотропийная норма, мультипликативные шумы, стохастические системы, конечный горизонт.

Аннотация:
В данной работе рассматривается проблема вычисления анизотропийной нормы для дискретной нестационарной модели объекта с мультипликативными шумами. Решение задачи сводится к решению специальной системы матричных рекуррентных уравнений. Внешние возмущения выбираются из класса центрированных последовательностей с ограниченным уровнем анизотропии. Мультипликативные шумы представляют собой нормально распределенные случайные величины, некоррелированные между собой и внешним возмущением.

1. Введение

Задачи фильтрации и управления для систем с мультипликативными шумами все чаще привлекают внимание вследствие их широкой практической значимости: обработка изображений [11, 12, 19], движение космических аппаратов [13], финансовая математика [2, 3] — связаны непосредственно именно с таким классом объектов. В отличие от аддитивной шумовой составляющей, мультипликативный шум вносит нелинейность в динамику системы, из–за чего становится невозможным применять известные приемы для фильтрации и управления для линейных систем. Поэтому разработаны подходы на основе теории игр [6, 18], развиты методы выпуклой оптимизации [5,7,8,23], также существует решение задачи синтеза $\mathcal{H}_\infty$–регуляторов таких систем в терминах уравнений Риккати [10]. Однако можно рассматривать присутствие мультипликативных шумов в моделируемом объекте в качестве неопределенности. В работах [16,17] были рассмотрены постановки задач управления для систем со стохастической неопределенностью, которую можно представить в виде мультипликативного шума.

В настоящей работе будет рассмотрена задача анизотропийного анализа системы с мультипликативными шумами. Как известно, анизотропийная теория управления использует информационный критерий для класса внешних возмущений, действующих на систему, и в некотором смысле обобщает результаты $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ теорий управления. В частности, при предельных значениях уровня средней анизотропии внешнего возмущения, равным нулю или стремящегося к бесконечности, анизотропийный регулятор будет давать аналогичные результаты (в смысле значений соответствующих норм замкнутых систем) при сравнении с оптимальным $\mathcal{H}_2$–регулятором или $\mathcal{H}_\infty$–регулятором. Основополагающие работы по теории анизотропийного управления появились в 1990-х годах, когда И.Г. Владимиров с рядом соавторов опубликовал несколько работ по этой тематике [1,20,21]. Позднее, в рамках этой теории было поставлено и решено множество задач по анализу, фильтрации и управлению как для обыкновенных, так и для дескрипторных систем. В качестве объекта управления всегда выбирались линейные системы и это было одним из главных требований к модели, поскольку идеология построения оптимальных регуляторов строилась на свойствах линейности формирующих фильтров [22], дублирующих состояние самого объекта управления. Недавно появилась идея распространения методов анизотропийной теории управления на класс систем с мультипликативными шумами, что потребовало несколько модифицировать и сами методы. Ряд публикаций [4,14,24], уже вышедших за последнее время, позволяют производить оценку анизотропийной нормы в указанных системах. Данная работа ставит задачу вычисления анизотропийной нормы для нестационарных систем, используя подход, изложенный в [15].

Материал данной работы изложен следующим образом: в первом разделе приводится необходимый теоретический минимум из анизотропийной теории управления, во втором разделе ставится задача анизотропийного анализа для нестационарной системы с мультипликативными некоррелированными шумами, в третьем разделе приведен основной результат, последний раздел содержит краткие выводы в виде заключения.

2. Предварительные сведения

Использование информационного критерия для описания множества внешних возмущений в анизотропийной теории позволяет работать с моделями объектов, наиболее приближенных к реальным, поскольку априорные сведения о классе внешних возмущений могут быть неточными или быть известными «с точность до». Выбранная мера отличия внешнего возмущения от гауссовского с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей основывается на таком понятии как анизотропия случайного вектора. Для произвольного случайного вектора W с плотностью распределения f выражение

$$\mathbf{A}(W) = \min_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln\left(\frac{2\pi e}{m} \|W\|^2\right) - \mathbf{h}(W),$$

где $\|W\| = \sqrt{\mathbf{E}\left[W^\top W\right]}$, $\mathbf{h} = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\ln f(x)dx$ — дифференциальная энтропия, $\mathbf{D}(\cdot)$ — информационное уклонение Кульбака–Лейблера, $\mathbf{E}\left[\cdot\right]$ — математическое ожидание, определяет анизотропию этого вектора [20, 21].

Множество векторов с ограниченной анизотропией обозначим следующим образом:

$$\mathbb{W} = \left\{W \in \mathbb{L}_2^m : \mathbf{A}(W) \leqslant a\right\},$$

где $\mathbb{L}_2^m$ — пространство m–мерных случайных векторов, интегрируемых с квадратом.

Рассмотрим среднеквадратичный коэффициент усиления

$$\mathbf{Q}(F, W) = \frac{\|FW\|}{\|W\|} = \sqrt{\frac{\mathrm{tr}\Lambda\Sigma}{\mathrm{tr}\Sigma}}, \tag{1}$$

где $F \in \mathbb{L}_2^{p\times m}$. Тогда, при условии взаимной независимости F и W, будет справедливым следующее:

$$\mathbf{Q}(F, W) = \sqrt{\frac{\mathrm{tr}\Lambda\Sigma}{\mathrm{tr}\Sigma}},$$

где $\Sigma = \mathbf{E}\left[WW^\top\right]$, $\Lambda = \mathbf{E}\left[F^\top F\right]$. Анизотропийной нормой называют верхнюю границу среднеквадратичного коэффициента усиления (1) по множеству векторов с ограниченным уровнем анизотропии:

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} \mathbf{Q}(F, W). \tag{2}$$

В работе [15] было продемонстрировано, что для системы

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ z_k = C_k x_k + D_k w_k, \end{cases}$$

где $x_k \in \mathbb{L}_2^n$, $w_k \in \mathbb{L}_2^m$, $z_k \in \mathbb{L}_2^p$, значение анизотропийной нормы $|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a$ может быть вычислено с помощью специальных функций

$$\mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q)-1}{q\Phi(q)}}, \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2}(\ln\Phi(q) - \Psi(q)), \tag{3}$$

где параметр $l_w = m * (N+1)$ зависит от размерности вектора возмущения w_k и времени N. Функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ в (3) имеют вид:

$$\Phi(q) = \frac{1}{l_w}\sum_{k=0}^{N} \mathrm{tr}(L_k \Upsilon_k L_k^\top + S_k), \quad \Psi(q) = \frac{1}{l_m}\sum_{k=0}^{N} \ln\det S_k, \tag{4}$$

где матрицы Υ_k вычисляются с помощью рекуррентного соотношения

$$\Upsilon_{k+1} = (\mathbf{E}\left[A_k\right] + \mathbf{E}\left[B_k\right] L_k)\Upsilon_k(\mathbf{E}\left[A_k\right] + \mathbf{E}\left[B_k\right] L_k)^\top + \mathbf{E}\left[B_k\right] S_k \mathbf{E}\left[B_k^\top\right]$$

при начальном условии $\Upsilon_0 = 0$. Матрицы S_k и L_k определяются через решение уравнения Риккати в обратном времени

$$\begin{aligned} R_{1,k} &= \mathbf{E}\left[A_k^\top R_{1,k+1} A_k\right] + q\mathbf{E}\left[C_k^\top C_k\right], \\ R_{2,k} &= \mathbf{E}\left[A_k^\top\right] R_{2,k+1}\mathbf{E}\left[A_k\right] + L_k^\top S_k^{-1} L_k, \end{aligned}$$

при начальных условиях $R_{1,N+1} = 0$, $R_{2,N+1} = 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S_k &= (I_m - q\mathbf{E}\left[D_k^\top D_k\right] - \mathbf{E}\left[B_k^\top R_{1,k+1} B_k\right] - \mathbf{E}\left[B_k^\top\right] R_{2,k+1}\mathbf{E}\left[B_k\right])^{-1}, \\ L_k &= S_k(q\mathbf{E}\left[D_k^\top C_k\right] + \mathbf{E}\left[B_k^\top R_{1,k+1} A_k\right] + \mathbf{E}\left[B_k^\top\right] R_{2,k+1}\mathbf{E}\left[A_k\right]). \end{aligned}$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему с мультипликативными шумами:

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x_{k+1} = (A_0 + A_1\xi_a)x_k + (B_0 + B_1\xi_b)w_k, \\ z_k = (C_0 + C_1\xi_c)x_k + (D_0 + D_1\xi_d)w_k, \end{cases} \tag{5}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $w_k \in \mathbb{R}^m$, $z_k \in \mathbb{R}^p$, уровень анизотропии возмущения $\{w_k\}$ не превосходит известное значение a. Матрицы, входящие в (5), известны. Одномерные случайные величины ξ_I, $I = \{a, b, c, d\}$ взаимно независимы и имеют нормальное распределение с нулевым первым моментом и единичным вторым. Задача анизотропийного анализа ставится в вычислении анизотропийной нормы $|||\mathcal{F}|||_a$ системы (5).

4. Основной результат

Сформулируем решение поставленной задачи анализа в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Анизотропийная норма системы с мультипликативными шумами вида (5) может быть вычислена следующим образом $|||\mathcal{F}|||_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где q — решение уравнения $\mathcal{A}(q) = a$, функции $\mathcal{N}(q)$, $\mathcal{A}(q)$ определяются согласно (3), функции $\Phi(q), \Psi(q)$ — согласно (4). Матрицы, входящие в $\Phi(q), \Psi(q)$ определяются через решение уравнения Риккати*

$$\begin{aligned} R_{1,k} &= A_0^\top R_{1,k+1} A_0 + A_1^\top R_{1,k+1} A_1 + qC_0^\top C_0 + qC_1^\top C_1, \\ R_{2,k} &= A_0^\top R_{2,k+1} A_0 + L_k^\top S_k^{-1} L_k, \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} S_k &= (I_m - qD_0^\top D_0 - qD_1^\top D_1 \\ &\qquad - B_0^\top R_{1,k+1} B_0 - B_1^\top R_{1,k+1} B_1 - B_0^\top R_{2,k+1} B_0)^{-1}, \\ L_k &= S_k(qD_0^\top C_0 + B_0^\top R_{1,k+1} A_0 + B_0^\top R_{2,k+1} A_0), \end{aligned}$$

матрицы Υ_k вычисляются согласно выражению:

$$\Upsilon_{k+1} = (A_0 + B_0 L_k)\Upsilon_k (A_0 + B_0 L_k)^\top + B_0 S_k B_0^\top.$$

Доказательство данной теоремы основано на применении техники вычисления анизотропийной нормы стохастической системы, подробно рассмотренной в [15].

5. Заключение

В работе продемонстрирована техника вычисления анизотропийной нормы для системы с мультипликативными шумами как частный случай стохастической нестационарной системы на конечном горизонте через решение специальной системы матричных уравнений. Полученный результат представляет практическую значимость в задачах анализа качества систем, работающих на установившемся режиме.

Работа частично выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 17–08–00185 А, № 18–31–00067 мол_а и № 18–07–01213 А).

Список литературы

1. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады Академии Наук. 1995. Т. 342, № 5. С. 583-585.
2. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
3. Шепард Н. Статистические аспекты моделей типа ARCH и стохастическая волатильность // Обозрение прикл. и пром. математики. 1996. Т. 3. С. 764-826.
4. Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П. Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами // Доклады Академии наук. 2016. Т. 467, № 4. С. 396-399.
5. Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory // SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
6. Chen Y.L., Chen B.S. Minimax robust deconvolution filters under stochastic parametric and noise uncertainties // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. Vol. 42. P. 32-45.
7. Dragan V., Stoica A. A γ–attenuation problem for discrete-time time-varying stochastic systems with multiplicative noise // Proc. IEEE Conf. Decision Control. Tampa, FL. 1998. P. 796-797.
8. Dhaoui L. El. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities // Syst. Control Lett., 1995. Vol. 24. P. 223-228.
9. Diamond P., Kloeden P., Vladimirov I.G. Mean anisotropy of homogeneous Gaussian random fields and anisotropic norms of linear translation-invariant operators on multidimentional integer lattices // J. Appl. Math. Stoch. Anal. 2003. Vol. 16, No. 3. P. 209-231.
10. Gershon E., Shaked U., Yaesh I. $\mathcal{H}_\infty$ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 409-417.
11. Hung Y.S., Ho H.T. A Kalman filter approach to direct depth estimation incorporating surface structure // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1999. Vol. 21. P. 570-575.
12. Hung Y.S., Yang F. $\mathcal{H}_\infty$ versus Kalman filtering for depth estimation // Proc. Int. Conf. Signal Processing Intelligent Systems. Guangzhou, P. R. China. 1999. P. 276-281.
13. Kouikoglou V.S., Phillis Y.A. Trace bounds on the covariances of continuous–time systems with multiplicative noise // IEEE Trans. Automat. Contr. 1993. Vol. 38. P. 138-142.
14. Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P., Yurchenkov A.V. On the Anisotropy-Based Bounded Real Lemma Formulation for the Systems with Disturbance-Term Multiplicative Noise // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49, No. 13. P. 65-69.
15. Kustov A.Yu. State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic Systems // Proceed. CCE. 2018.
16. Petersen I., James M.R. Performance analysis and controller synthesis for nonlinear systems with stochastic uncertainty constraints // Automatica. 1996. Vol. 32. P. 959-972.
17. Petersen I., James M.R., Dupuis P. Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. 2000. Vol. 45. P. 398-412.
18. Phillis Y.A. Estimation and control of systems with unknown covariance and multiplicative noise // IEEE Trans. Automat. Contr. 1989. Vol. 34. P. 1075–1078.
19. Tekalp A.M., Pavlovic G. Image restoration with multiplicative noise: Incorporating the sensor nonlinearity // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. Vol. 39. P. 2132-2136.
20. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete Time–invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congr. USA, 1996. P. 179–184.
21. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic $\mathcal{H}_\infty$–optimization problem // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29, No. 1. P. 3816-3821.
22. Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy–based robust performance analysis of linear time varying systems // CADSMAP Research Report 01–01. The University of Queensland, Australia, 2001.
23. Wang F., Balakrishnan V. Robust adaptive Kalman filters for linear time-varying systems with stochastic parametric uncertainties // Proc. Amer. Control Conf. San Diego, CA. 1999. P. 440-444.
24. Yurchenkov A.V. Anisotropy-Based Controller Design for Linear Discrete-Time Systems with Multiplicative Noise // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018. Vol. 57,

No. 6, P. 864-873.